Notatki do wykładu “Geometria tensorów”

Jarosław Buczyński

19 marca 2015

1 Wstęp

W naukach ścisłych i inżynierii naukowcy analizują *skomplikowane* dane, aby wyizolować stosunkowo *proste* zjawiska, które mają kluczowe znaczenie w badanej sytuacji.

Jako przykład wyobraźmy sobie kilka osób rozmawiających przez telefon komórkowy w tym samym momencie. Stacja-odbiornik musi rozłożyć *skomplikowaną* falę elektromagnetyczną na *proste* pojedyncze sygnały, z których każdy przenosi jedną rozmowę.

Następny przykład pochodzi ze spektroskopii fluorescencyjnej. Jest to metoda służąca do analizowania stężenia związków chemicznych w próbkach roztworu. Każda próbka jest prześwietlana światłem o różnych długościach fali i badane są długości fal światła emitowanego. Zebrane dane mogą być *skomplikowane* i poszukiwany jest sposób rozłożenia danych na *proste* składniki pochodzące od pojedynczych związków chemicznych wchodzących w skład roztworu.

Problemy tego rodzaju są wszechobecne w nauce i stanowią motywację dla naszych badań nad *rozmaitościami siecznych* oraz nad powiązanymi pojęciami: rangą, rangą brzegową i rozkładem minimalnym.

Rozważmy skończenie wymiarową przestrzeń wektorową W nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ oraz podzbiór $\hat{X} \subset W$ rozpinający W, jako przestrzeń liniową. Niech $p \in W$. Definiujemy *$\hat{X}$-rangę* p jako najmniejszą liczbę całkowitą $r = r_{\hat{X}}(p)$, taką, że

$$p = \lambda_1 \hat{x}_1 + \lambda_2 \hat{x}_2 + \cdots + \lambda_r \hat{x}_r \text{ dla pewnych } \hat{x}_i \in \hat{X} \text{ i } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Równoważnie r jest minimalną liczbą całkowitą taką, że $p \in \langle \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_r \rangle$, gdzie $\langle R \rangle$ oznacza przestrzeń liniową rozpiętą przez zbiór R.

Myślimy o V jak o zbiorze wszystkich możliwych stanów, zaś o $\hat{X}$ jak o zbiorze *prostych* stanów, oraz o p jak o *skomplikowanym* przypadku, który chcemy rozłożyć. Wobec tego ranga powinna być liczbą prostych składników, na które można rozłożyć nasz wybrany skomplikowany stan.

W powyższych przykładach, w optymalnych warunkach, ranga jest liczbą rozmów przez komórkę, lub liczbą substancji chemicznych w roztworze. Oczywiście kilka ważnych problemów może stanowić przeszkodę: jeśli składników/rozmów jest dużo, ranga może nie być pomocna. Nietrudno wyobrazić sobie, że gdy prowadzonych jest zbyt wiele rozmów jednocześnie na jednym odbiorniku, to nie jest możliwe oddzielenie pojedynczej rozmowy. Za moich czasów studenckich, tak się działo każdego roku na Sylwestra w Tatrach. Nie było możliwe zadzwonienie do krewnych z życzeniami. Podobno ten problem jeszcze występuje, ale sam nie spędzam już Sylwestra w Tatrach, więc nie wiem. Podobnie, gdy dysponujemy niewielką liczbą pomiarów światła w porównaniu z liczbą składników roztworu, to nie będziemy potrafili ich zidentyfikować. Inny ważny problem to *zakłócenia* (dane z odbiornika są nieco zniekształcone). Istnieją metody radzenia sobie z zakłóceniami, nie jest to jednak przedmiotem tego wykładu.

Rozważmy teraz kilka bardziej matematycznych przykładów.

1.1 Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy jest dwuliniowym odwzorowaniem $\mathbb{C}^{fg} \times \mathbb{C}^{gh} \to \mathbb{C}^{fh}$. Można więc myśleć o nim jako tensorze

$$M_{f,g,h} \in (\mathbb{C}^{fg})^* \otimes (\mathbb{C}^{gh})^* \otimes \mathbb{C}^{fh} = A \otimes B \otimes C = W.$$

Najprostszy, naiwny algorytm tego mnożenia potrzebuje fgh mnożeń liczb zespolonych i zapisuje się w postaci tensorowej jako:

$$M_{f,g,h} = \sum_{i,j,k} a_{ij} \otimes b_{jk} \otimes c_{ik}. \tag{1.1}$$

Jest to rozkład na sumę fgh *prostych tensorów* postaci $a \otimes b \otimes c$.

Niech $\hat{X} := \hat{Seg}(A \times B \times C) \subset W$ będzie zbiorem tensorów prostych. Wypisany powyżej rozkład daje oszacowanie na rangę $r_{\hat{X}}(M_{f,g,h}) \leq fgh$.

Strassen udowodnił, że dwie macierze 2×2 można pomnożyć używając jedynie 7 mnożeń liczb zespolonych (zamiast $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mnożeń) [Stra69]:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I + IV - V + VII & III + V \\ II + IV & I + III - II + VI \end{pmatrix}\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} I :=& (a_1 + a_4)(b_1 + b_4) & II :=& (a_3 + a_4)b_1 \\ III :=& a_1(b_2 - b_4) & IV :=& a_4(-b_1 + b_3) \\ V :=& (a_1 + a_2)b_4 & VI :=& (-a_1 + a_3)(b_1 + b_2) \\ VII :=& (a_2 - a_4)(b_3 + b_4), \end{aligned}$$

co w zapisie tensorowym przekłada się na:

$$\begin{aligned} M_{2,2,2} =& (a^1 + a^4) \otimes (b^1 + b^4) \otimes (c_1 + c_4) \\ &+ (a^3 + a^4) \otimes b^1 \otimes (c_3 - c_4) \\ &+ a^1 \otimes (b^2 - b^4) \otimes (c_2 + c_4) \\ &+ a^4 \otimes (-b^1 + b^3) \otimes (c_1 + c_3) \\ &+ (a^1 + a^2) \otimes b^4 \otimes (-c_1 + c_2) \\ &+ (-a^1 + a^3) \otimes (b^1 + b^2) \otimes c_4 \\ &+ (a^2 - a^4) \otimes (b^3 + b^4) \otimes c_1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Zatem $r_{\hat{X}}(M_{2,2,2}) \leq 7$ (a tak naprawdę X-ranga jest równa 7). Jeśli zastosujemy ten algorytm wielokrotnie do macierzy blokowych, dostaniemy nowy sposób na pomnożenie dwóch $f \times f$ macierzy kwadratowych używając około $f^{\log_2 7} \simeq f^{2.81}$ mnożeń liczb zespolonych. Tę dyskusję można podsumować w następującym zdaniem: **Ranga mnożenia małych macierzy może dawać asymptotyczne ograniczenie górne na złożoność obliczeniową mnożenia dużych macierzy.**

Mnożenie macierzy jest tylko przykładem odwzorowania wieloliniowego, istnieją też inne bardzo ważne tego typu odwzorowania, które możemy badać w analogiczny sposób.

1.2 Ewaluacja wielomianów

Niech $W := S^d\mathbb{C}^n$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów jednorodnych stopnia d w n zmiennych. Oznaczmy przez $\hat{X} := \hat{v}_d(\mathbb{C}^n) \subset W$ zbiór l^d po wszystkich $l \in \mathbb{C}^n$, czyli zbiór d-tych potęg form linowych. Zauważmy, że ewaluacja formy linowej w punkcie jest operacją dość tanią. Mając daną $p = l^d$ oraz n-tkę liczb zespolonych $a = (a_1, \ldots, a_n)$, możemy podstawić $l(a)$ i kolejno wyliczyć $l(a)^d = l(a)^{\lfloor d/2 \rfloor} \cdot l(a)^{\lceil d/2 \rceil}$. To oznacza, że stopień skomplikowania ewaluacji jest co najwyżej $\sim n \log_2 d$ w tym przypadku. Zatem złożoność ewaluacji wielomianu p wynosi co najwyżej $\sim r_X(p) \cdot n \log_2 d$.

W tym duchu, **ranga wielomianu mierzy obliczeniową złożoność ewaluacji wielomianów.**

Warto wspomnieć, że w przypadku wielomianów jednorodnych ranga jest również nazywana *rangą Waringa* w hołdzie matematykowi E. Waringowi, który w XVIII wieku zajmował się przedstawianiem liczb całkowitych jako sumy potęg, zobacz pracę przeglądową [VW02].

2 Przestrzenie tensorów

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$. Przez V^* oznaczamy *dualną przestrzeń wektorową*, czyli przestrzeń odwzorowań liniowych $V \to \mathbb{F}$.

Uwaga 2.1. Wykład dotyczy *geometrii*. To znaczy, że o przestrzeniach wektorowych myślimy jako o obiektach geometrycznych, często V będzie miało jakąś dodatkową strukturę. Pierwsze twierdzenie, którego uczymy się na kursie algebry liniowej nam mówi, że każde dwie przestrzenie wektorowe tego samego wymiaru są izomorficzne, więc niby V i V^* powinny być izomorficzne. Jednak te dwie przestrzenie mają zupełnie inne interpretacje geometryczne, o czym będziemy się przekonywać w trakcie tego wykładu.

Ćwiczenie 2.1. *Pokazać (naturalny) izomorfizm $V \simeq (V^*)^*$, tzn. taki, który nie zależy od żadnych wyborów, w szczególności od wyboru bazy.*

Przykład 2.2. Niech $M_{k\times l}$ będzie przestrzenią wektorową macierzy $k \times l$. Wektory z tej przestrzeni mają znaczenie, można odróżnić macierz rangi 1, np. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, od macierzy rangi 3, np. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, niezależnie od wyborów bazy itp.

Przykład 2.3. $W = S^d\mathbb{F}^2$ to przestrzeń wielomianów jednorodnych stopnia d w dwóch zmiennych

$$W = \left\{ a_0x^d + a_1x^{d-1}y + \cdots + a_dy^d : a_i \in \mathbb{F} \right\},$$

gdzie x, y są zmiennymi. Wektory:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, \ldots, 0) &= x^d, \\ (0, \ldots, 0, 0, 1) &= y^d, \text{ oraz} \\ \left(1, d, \tbinom{d}{2}, \ldots, \tbinom{d}{d}\right) &= (x+y)^d \end{aligned}$$

są take same, natomiast

$$(1, 0, \ldots, 0, 1) = x^d + y^d$$

jest “inny”, przynajmniej o ile $d \geq 2$ oraz $\operatorname{char} \mathbb{F}$ nie dzieli d. Jeśli $d > 2$, to sama ranga nie wystarcza, żeby odróżnić wielomiany.

Odwzorowanie $\Theta\colon V_1 \times V_2 \to W$, lub ogólniej $\Theta\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_k \to W$, jest odwzorowaniem dwuliniowym (lub wieloliniowym) jeśli dla każdego i, dla dowolnych ustalonych $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$, odwzorowanie:

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k)\colon V_i \to W$$

jest liniowe.

Odwzorowanie liniowe $\Theta\colon V \to W^*$ wyznacza jednoznacznie odwzorowanie dwuliniowe: $\Theta'\colon V \times W \to \mathbb{F}$:

$$\Theta'(v, w) := \Theta(v)(w)$$

oraz odwrotnie, $\Theta'\colon V \times W \to \mathbb{F}$ wyznacza $\Theta\colon V \to W^*$:

$$\Theta(v) = \Theta'(v, \cdots)$$

Ćwiczenie 2.2. *Zbiór odwzorowań wieloliniowych* $\{\Theta\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W\}$ *jest przestzenią liniową.*

Tą przestrzeń liniową oznaczamy przez $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W$, np.

$$\begin{aligned} V_1^* \otimes W &= \operatorname{Hom}(V_1 \to W) \\ V_1 \otimes W &= \operatorname{Hom}(V_1^* \to W) \\ V_1 \otimes V_2 \otimes W &= \operatorname{Hom}(V_1^* \otimes V_2^* \to W) \\ &= \operatorname{Hom}(V_1^* \to V_2^* \otimes W) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2.3. *Produkt tensorowy przestrzeni wektorowych jest przemienny i łączny, tzn:*

$$V_1 \otimes V_2 = V_2 \otimes V_1 \quad \textit{oraz} \quad V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3).$$

Oznaczenie 2.4. Tensor $\Theta = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes w \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W$ odpowiada odwzorowaniu k-liniowemu $\Theta'\colon V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \to W$ zadanemu przez wzór:

$$\Theta'(v_1, v_2, \dots, v_k) := \alpha_1(v_1) \cdot \alpha_2(v_2) \cdots \alpha_k(v_k) \cdot w.$$

Od tej pory (o ile nie będzie to wprowadzało zamieszania) będziemy identyfikować Θ, Θ' i podobne naturalne utożsamienia.

Przykład 2.5. Mnożenie macierzy $\mu_{k,l,m}\colon M_{k\times l}\times M_{l\times m}\to M_{k\times m}$ jest odwzorowaniem dwuliniowym, więc:

$$\mu_{k,l,m}\in (M_{k\times l})^*\otimes (M_{l\times m})^*\otimes M_{k\times m}.$$

Definicja 2.6. Mówimy, że tensor $\Theta\in V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ jest *prosty*, jeśli $\Theta = v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k$ (bez użycia sumy).

Ćwiczenie 2.4. *$X\in V_1\otimes V_2$ jest tensorem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy $X\colon V_1^*\to V_2$ jest odwzorowaniem liniowym rzędu 1.*

Ćwiczenie 2.5. *Tensory proste w $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_k$ rozpinają tą przestrzeń tensorową, ale nie są to wszystkie tensory.*

Rozpatrzmy $V^{\otimes d} := \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{d\text{ razy}}$. Oznaczmy przez Σ_d grupę permutacji d elementów, która działa na $V^{\otimes d}$ przez zamianę kolejności czynników:

$$\Sigma_k\times V^{\otimes d}\to V^{\otimes d}$$
$$(\sigma, v_1\otimes\ldots\otimes v_d)\mapsto v_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma(d)}$$

oraz rozszerzamy liniowo do działania na całym $V^{\otimes d}$.

Definicja 2.7. Tensor $T\in V^{\otimes d}$ jest symetryczny, jeśli jest niezmienniczy ze względu na działanie Σ_d, czyli $\sigma\cdot T = T$ dla wszystkich $\sigma\in\Sigma_d$ Zbiór tensorów symetrycznych oznaczamy przez S^dV.

Definicja 2.8. Niech $K\subset V^{\otimes d}$ będzie najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą wszystkie tensory postaci:

$$v_1\otimes v_{i-1}\otimes w\otimes v_{i+1}\otimes\cdots\otimes v_{j-1}\otimes w\otimes v_{j+1}\cdots\otimes v_d,$$

gdzie $i\neq j$, oraz $v_1,\ldots,v_d,w\in V$. Przestrzeń tensorów alternujących to przestrzeń ilorazowa $\bigwedge^d V = V^{\otimes d}/K$.

Ćwiczenie 2.6. *Jeśli* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ *to:*

- *S^dV możemy naturalnie utożsamić z przestrzenią wielomianów jednorodnych stopnia d w zmiennych, które tworzą bazę V.*
- *$\bigwedge^d V$ możemy naturalnie utożsamić z przestrzenią tensorów skośniesymetrycznych w $V^{\otimes d}$, czyli takich, że $\sigma\cdot T = \operatorname{sign}(\sigma)T$ dla wszystkich $\sigma\in\Sigma_d$*

2.1 Ranga tensorowa, symetryczna, skośniesymetryczna

Ćwiczenie 2.7. *Pokaż, że rząd odwzorowania liniowego $f\colon V \to W$ (lub odpowiadającej mu macierzy), jest równy najmniejszej liczbie r, takiej, że*

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r,$$

gdzie f_i są odwzorowaniami rzędu 1.

Definicja 2.9. Ranga tensora $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ to najmniejsza liczba $r = r(T) = r_{Seg}(T)$, taka, że $T = T_1 + \cdots + T_r$, gdzie T_i są tensorami prostymi.

Ranga symetryczna tensora symetrycznego $F \in S^d V$ to najmniejsza liczba $r = r_{sym}(F) = r_{v_d}(F)$, taka, że $F = F_1 + \cdots + F_r$, gdzie F_i są symetrycznymi tensorami prostymi, czyli $F_i = \ell_i^{\otimes d}$. W charakterystyce 0, przechodząc do wielomianów, F_i są wielomianami postaci ℓ_i^d, dla form liniowych ℓ_i.

Ranga skośniesymetryczna tensora $P \in \bigwedge^d V$ to najmniejsza liczba $r = r_{skew}(P) = r_{Grass}(P)$, taka, że $P = P_1 + \cdots + P_r$, gdzie P_i są skosniesymetrycznymi tensorami prostymi, czyli postaci $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$.

Bardziej ogólnie, jeśli W jest przestrzenią liniową oraz $\hat{X} \subset W$, to możemy rozpatrywać X-rangę punktu $p \in W$, czyli najmniejszą liczbę $r = r_X(p)$, taką, że $p = x_1 + \cdots + x_r$, dla pewnych $x_i \in \hat{X}$. Aby ograniczyć się do sensownych przypadków, będziemy zawsze zakładać, że $\hat{X}$ spełnia następujące własności:

- $\hat{X}$ jest niezmienniczy ze względu na przeskalowania: $\forall_{\lambda \in \mathbb{C}} (x \in \hat{X} \Rightarrow \lambda x \in \hat{X})$,
- $\hat{X}$ jest domknięty,
- (opcjonalnie) $\hat{X}$ "ma sensowną strukturę", tzn. $\hat{X}$ jest rozmaitością algebraiczną.

Definiujemy przestrzeń rzutową $\mathbb{P}W = (W \setminus \{0\})/\mathbb{F}^*$, gdzie $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ jest grupą multyplikatywną ciała $\mathbb{F}$. Jeśli $\hat{X}$ jest takie jak powyżej, to definiujemy $X \subset \mathbb{P}(W)$, $X = (\hat{X} \setminus \{0\})/\mathbb{F}^*$. X jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{P}(W)$. Przykłady:

Przykład 2.10. Jeśli $W = V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ i $\hat{X}$ jest zbiorem tensorów prostych, to $X = \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k)$. Konkretnie, jeśli $x = ([v_1], \ldots, [v_k]) \in X$, to mamy zanurzenie $Seg\colon X \to \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$, zadane $Seg(x) = [v_1 \otimes \cdots \otimes v_k]$. (Ćwiczenie: sprawdzić, że Seg jest dobrze okeślone i jest zanurzeniem.) Odwzorowanie to nazywamy zanurzeniem Segre, X jest rozmaitością Segre. X-ranga w tym przypadku jest tym samym, co ranga tensorowa.

Przykład 2.11. Jeśli $W = S^dV$ i $\hat{X}$ jest zbiorem symetrycznych tensorów prostych, to $X \simeq \mathbb{P}(V)$. Konkretnie, jeśli $x = [\ell] \in \mathbb{P}V$, to mamy zanurzenie $v_d \colon X \to \mathbb{P}(S^dV)$, zadane $v_d(x) = [\ell \otimes \cdots \otimes \ell]$. (Ćwiczenie: sprawdzić, że v_d jest dobrze określone i jest zanurzeniem.) Odwzorowanie to nazywamy zanurzeniem Veronese stopnia d, X jest rozmaitością Veronese. X-ranga w tym przypadku jest tym samym, co ranga symetryczna.

Przykład 2.12. Jeśli $W = \bigwedge^d V$ i $\hat{X}$ jest zbiorem skośniesymetrycznych tensorów prostych, to $X = Gr(d, V)$, czyli Grassmannian parametryzujący d-wymiarowe podprzestrzenie liniowe w V. Konkretnie, jeśli $U \in X$, to mamy zanurzenie $Pl \colon X \to \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$, zadane $Pl(U) = [\bigwedge^d U]$. (Ćwiczenie: sprawdzić, że Pl jest dobrze określone i jest zanurzeniem.) Odwzorowanie to nazywamy zanurzeniem Plückera, X jest Grassmannianem. X-ranga w tym przypadku jest tym samym, co ranga skośniesymetryczna.

Przykład 2.13. Możemy też mieszać powyższe przykłady. Chociażby $\hat{X} \subset W \otimes S^2V$, $X = \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}V \hookrightarrow \mathbb{P}(W \otimes S^2V)$, gdzie $([w],[v]) \mapsto [w \otimes v^2]$. Odwzorowanie to nazywamy zanurzeniem Segre-Veronese dwustopnia $(1, 2)$.

Podstawowe własności X-rangi:

(i) $r_X(p) = 0 \Leftrightarrow p = 0$ (konwencja).

(ii) $r_X(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \hat{X} \setminus \{0\}$.

(iii) $Y \subset X$, $p \in \langle \hat{Y} \rangle$ (to znaczy, p należy do powłoki liniowej $\hat{Y}$), to $r_Y(p) \geq r_X(p)$.

(iv) $r_X(\lambda p) = r_X(p)$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{F}^*$.

(v) $r_X(p_1 + p_2) \leq r_X(p_1) + r_X(p_2)$.

Lemat 2.14. *Załóżmy, że mamy podprzestrzeń liniową $W \subset V_1$ oraz $X = \mathbb{P}V_1 \times \mathbb{P}V_2 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$ i $Y = \mathbb{P}W \times \mathbb{P}V_2 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$, a także $p \in W \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$. Wtedy $r_X(p) = r_Y(p)$.*

Analogicznie dla tensorów symetrycznych: $W \subset V$, $F \in S^dW$, $X = v_d(\mathbb{P}V)$, $Y = v_d(\mathbb{P}W)$, to $r_X(F) = r_Y(F)$.

Dowód: ćwiczenie.

Ćwiczenie 2.8. *Ranga kwadryki, ranga skośniesymetryczna w $\bigwedge^2 V$.*

3 Wielomiany jednorodne w dwóch zmiennych

Ustalamy ciało $\mathbb{F}$. Zazwyczaj, będziemy sobie życzyli, aby $\mathbb{F}$ było algebraicznie domknięte, aby $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, lub wręcz $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W trakcie ćwiczeń będziemy omawiali, jakie problemy i patologie możemy napotkać, gdy któreś z tych założeń o $\mathbb{F}$ nie jest spełnione, jak te problemy rozwiązać, lub dlaczego lepiej te patologie zostawić w spokoju.

W tym rozdziale wstępnie omówimy rozkłady wielomianów na sumy potęg. Na początek, niech $P(x, y)$ będzie wielomianem jednorodnym zależnym od dwóch zmiennych:

$$P(x, y) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1}y + \cdots + a_1 xy^{d-1} + a_0 y^d$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_d$ są liczbami z ciała $\mathbb{F}$.

Problem. Jak znaleźć rangę wielomianu P oraz jego rozkład minimalny? To znaczy, niech r będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że

$$P(x, y) = \ell_1^d + \ell_2^d + \cdots + \ell_r^d$$

dla pewnych liniowych wielomianów $\ell_i(x) = b_i x + c_i y$. Chcemy znaleźć r (rangę P) oraz ℓ_i (rozkład minimalny P).

Ćwiczenie 3.1. *Wyznacz rangę wielomianu* $P(x, y) = x^3 + 3xy^2$.

Różniczki $P(x, y)$ to następujące wielomiany:

$$\alpha \lrcorner P := \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = d a_d x^{d-1} + (d-1)a_{d-1}x^{d-2}y + \cdots + 2a_2 xy^{d-2} + a_1 y^{d-1}$$
$$\beta \lrcorner P := \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = a_{d-1}x^{d-1} + 2a_{d-2}x^{d-2}y + \cdots + (d-1)a_1 xy^{d-2} + d a_0 y^{d-1}$$

Ćwiczenie 3.2. *Policz* $\alpha \lrcorner (x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2)$, $\beta \lrcorner (x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2)$.

Wielokrotne pochodne będziemy oznaczać podobnie. Na przykład:

$$\alpha^2 \lrcorner P := d(d-1)a_d x^{d-2} + (d-1)(d-2)a_{d-1}x^{d-3}y + \cdots + a_2 y^{d-2}$$

i tak dalej. Ta konwencja jest wygodna dla operacji algebraicznych na różniczkach, przykładowo

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta - \alpha^2) \lrcorner P &= (\alpha \lrcorner (\beta \lrcorner P)) - \alpha \lrcorner (\alpha \lrcorner P) \\
(\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2) \lrcorner P &= \alpha \lrcorner (\alpha \lrcorner P) + (\alpha \lrcorner (\beta \lrcorner P)) - 2(\beta \lrcorner (\beta \lrcorner P))P(x) \\
(\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta) \lrcorner P &= \alpha \lrcorner (\alpha \lrcorner P + 2\beta \lrcorner P) - \beta \lrcorner (\alpha \lrcorner P + 2\beta \lrcorner P).
\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.3. *Policz*

$$(\alpha\beta - \alpha^2)\lrcorner(x^2y - xy^2).$$

Standardowe własności różniczek:

- $\Theta\lrcorner(P + R) = \Theta\lrcorner P + \Theta\lrcorner R$;
- $(\Theta + \Phi)\lrcorner P = \Theta\lrcorner P + \Phi\lrcorner P$;
- $(f\Theta)\lrcorner P = \Theta\lrcorner(fP) = f(\Theta\lrcorner P)$;
- $(\Theta + \Phi)\lrcorner(P + R) = \Theta\lrcorner P + \Theta\lrcorner R + \Phi\lrcorner P + \Phi\lrcorner R$;
- $\Theta\Phi\lrcorner P = \Theta\lrcorner(\Phi\lrcorner P) = \Phi\lrcorner(\Theta\lrcorner P)$;
- $(f\alpha + g\beta)\lrcorner(PR) = ((f\alpha + g\beta)\lrcorner P)R + P((f\alpha + g\beta)\lrcorner R)$.

Powyżej $P = P(x, y)$ i $R = R(x, y)$ są wielomianami w zmiennych x, y, natomiast Θ i Φ są wielomianami w zmiennych α i β. Ponadto $f, g \in \mathbb{F}$, a $(f\alpha + g\beta)$ jest dowolną liniową różniczką.

Ćwiczenie 3.4. *Pokaż, że* $(b\alpha - a\beta)\lrcorner\left[(ax + by)^d\right] = 0$ *dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{F}$ *i dowolnego* $d > 0$.

Ćwiczenie 3.5. *Pokaż, że* $\beta(2\alpha - \beta)\lrcorner\left[(x + 2y)^d + x^d\right] = 0$ *dla dowolnego* $d > 0$.

Ćwiczenie 3.6. *Pokaż, że* $(\alpha+\beta)\beta(2\alpha-\beta)\lrcorner\left[(x + 2y)^d + x^d + (x - y)^d\right] = 0$ *dla dowolnego* $d > 0$.

Ćwiczenie 3.7. *Przypuśćmy, że* $(b\alpha - a\beta)\lrcorner P = 0$ *dla jakiegoś wielomianu* $P = P(x, y)$ *stopnia* d *oraz dla* $(a, b) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$. *Pokaż, że* $P = c(ax + by)^d$ *dla pewnego* $c \in \mathbb{F}$.

Ćwiczenie 3.8. *Znajdź niezerowy wielomian kwadratowy* Θ *w zmiennych* α *i* β *postaci:*

$$\Theta = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2,$$

taki, że $\Theta\lrcorner(x^3y + xy^3) = 0$. *Jaką rangę ma* $P(x, y) = x^3y + xy^3$*?*

Ćwiczenie 3.9. *Załóżmy, że*

$$\Theta = (b_1\alpha - a_1\beta)(b_2\alpha - a_2\beta)\cdots(b_r\alpha - a_r\beta)$$

dla parami nieproporcjonalnych form liniowych $(b_i\alpha - a_i\beta)$. *Pokaż, że jeśli* $\Theta\lrcorner P = 0$ *dla wielomianu jednorodnego* $P \in \mathbb{F}[x, y]$ *stopnia* d, *to*

$$P(x, y) = c_1(a_1x + b_1y)^d + c_2(a_2x + b_2y)^d + \cdots + c_r(a_rx + b_ry)^d$$

dla pewnych $c_i \in \mathbb{F}$.

Ćwiczenie 3.10. *Ćwiczenie podsumowujące:*

(i) *Opisz* dobrą metodę, *którą można wyznaczyć rangę r dowolnego wielomianu jednorodnego dwóch zmiennych $P(x, y)$ oraz policzyć jego rozkład minimalny:*

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)^d + (a_2x + b_2y)^d + \cdots + (a_rx + b_ry)^d.$$

*(**Uwaga**: to zadanie można różnie interpretować i różnie rozwiązać; Uznamy, że metoda jest* wystarczająco dobra*, jeśli uda się ją przetestować na poniższych przykładach.)*

(ii) *Uzasadnij poprawność swojej metody. Można korzystać z poprzednich ćwiczeń, pod warunkiem umieszczenia ich rozwiązań w swojej pracy.*

(iii) *Przetestuj swoją metodę na kilku przykładach (w szczególności znajdź rangi i rozkłady minimalne tych wielomianów):*

(a) $3x^5y + 40x^3y^3 + 48xy^5$,

(b) $5x^4y + y^5$,

(c) $x^4 + 6x^2y^2 + 2y^4$,

(d) *własny przykład.*

(Można, jak ktoś chce, zaimplementować swoją metodę na komputerze. Jednakże te przykłady powinno się dać policzyć ręcznie. Jeśli są z tym problemy, to może to świadczyć o wątłej jakości metody.)

(iv) *Co należałoby zdefiniować inaczej, żeby analogiczna metoda zadziałała,*

(a) *gdy $\mathbb{F}$ nie jest algebraicznie domknięte;*

(b) *gdy* $\operatorname{char}\mathbb{F} > 0$*?*

Jest jasne, że rozkład prawie nigdy nie jest jednoznaczny, gdyż możemy zmieniać kolejność składników oraz przeskalowywać formy przez pierwiastki z jedności. Na przykład:

$$P(x, y) = 3x^6 + 6x^5y + 75x^4y^2 + 140x^3y^3 + 255x^2y^4 + 186xy^5 + 65y^6.$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (x + 2y)^6 + x^6 + (x - y)^6 \\ &= x^6 + (x - y)^6 + (x + 2y)^6 \\ &= (-x + y)^6 + (x + 2y)^6 + \left(\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}x\right)^6 \end{aligned}$$

i tak dalej. Będziemy utożsamiać te rozkłady, mówiąc, że są one takie same z dokładnością do kolejności i przeskalowań. W rzeczy samej, powyższy wielomian P ma jednoznaczny rozkład z dokładnością do kolejności i przeskalowań.

Ćwiczenie 3.11. *Znajdź rangę $P(x,y) = x^3y$. Czy rozkład minimalny jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności i przeskalowań?*

Ćwiczenie 3.12. *Udowodnij, że ranga wielomianu*

$$P(x,y) = x^4y + 8x^2y^3 + \tfrac{16}{5}y^5$$

jest równa 2*. Czy rozkład minimalny jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności i przeskalowań?*

Ćwiczenie 3.13. *Czy istnieje wielomian (jednorodny, dwóch zmiennych) $P(x,y)$ rangi* 2*, który ma więcej niż jeden rozkład minimalny (z dokładnością do kolejności i przeskalowań)? Jeśli tak, to ile ma on takich rozkładów?*

4 Rozmaitości siecznych i ranga brzegowa

Ustalmy domknięty zbiór $\hat{X} \subset W$, niezmienniczy ze względu na przeskalowania. Dodatkowo, zakładamy $\hat{X}$, że jest rozmaitością afiniczną, czyli zbiorem domkniętym w W, który można opisać równaniami wielomianowymi.

Z tych dwóch założeń wynika, że $\hat{X}$ jest stożkiem afinicznym rzutowej rozmaitości $X \subset \mathbb{P}W$, z którą jest znacznie wygodniej pracować, gdyż ma własności zwartej przestrzeni topologicznej. To znaczy,

$$X = (\hat{X} \setminus 0)/\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}W = (W \setminus 0)/\mathbb{C}^*.$$

Od tej pory będziemy rozważać rozmaitość rzutową $X \subset \mathbb{P}W$, a odpowiadające obiekty (liniowe/afiniczne) w W będą oznaczane daszkiem $\hat{}$, a notacja i sformułowania twierdzeń będą głównie w wersji rzutowej. Dla uproszczenia można mieć na uwadze przykłady Veronese i Segre, tzn.:

(i) rozmaitość Veronese

$$v_d(\mathbb{P}V) \subset \mathbb{P}(S^dV), \quad v_d(\mathbb{P}V) = \left\{[l^d] : l \in V\right\}, \text{ oraz}$$

(ii) rozmaitość Segre

$$\begin{aligned} \mathrm{Seg} &= \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C) \subset \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C), \\ \mathrm{Seg} &= \{[a \otimes b \otimes c] : a \in A, b \in B, c \in C\}, \end{aligned}$$

ewentualnie z inną liczbą czynników.

Możemy zastosować definicję X-rangi również do $p \in \mathbb{P}W$, a więc $r_X(p)$ jest minimalną liczbą całkowitą r, taką, że $p \in \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ dla pewnych $x_i \in X$. Tu $\langle R \rangle$ oznacza rozpięcie rzutowej przestrzeni liniowej, czyli najmniejszej podprzestrzeni $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}W$ zawierającej R.

Definiujemy r-tą *rozmaitość siecznych* rozmaitości X jako domknięcie sumy wszystkich podprzestrzeni linowych rozpiętych przez r punktów z X:

$$\sigma_r(X) := \overline{\bigcup \{\langle x_1, \dots, x_r \rangle : x_i \in X\}} \subset \mathbb{P}W.$$

Rozmaitość siecznych jest więc domknięciem zbioru punktów rangi co najwyżej r. W szczególności proste styczne do X są granicami prostych siecznych, zatem punkty zanurzonej przestrzeni stycznej do X w gładkim punkcie zawierają się w $\sigma_2(X)$, jednak zwykle punkty tamże mają rangę wyższą niż 2.

Wobec tego stratyfikacja W przez rangę może być bardzo skomplikowana. Jest to motywacją dla przyjęcia następującej definicji. Niech $p \in \mathbb{P}W$ (lub $p \in W$). Definiujemy $\underline{\mathbf{r}}_X(p)$ jako *X-rangę brzegową* punktu p, czyli minimalną liczbę naturalna r, taką, że $p \in \sigma_r(X)$ (lub $[p] \in \sigma_r(X)$, gdzie $[p] \in \mathbb{P}W$ jest klasą $p \in W$ w przestrzeni rzutowej; przyjmujemy, że $\underline{\mathbf{r}}_X(p) = r_X(p) = 0$, gdy $p = 0$). Innymi słowy, X-ranga brzegowa punktu p to najmniejsza liczba naturalna r taka, że p przybliża się przez kombinacje liniowe r punktów z X. Zawsze $\underline{\mathbf{r}}_X(p) \leq r_X(p)$. W wielu zastosowaniach wystarczający jest przybliżony wynik, więc X-ranga brzegowa jest interesującą i ważną wielkością. Jako przykład wróćmy do mnożenia macierzy: dobre ograniczenie na X-rangę brzegową może posłużyć do szybkiego pomnożenia macierzy z dowolnie zadaną dokładnością. Dlatego ważne jest badać kryteria, które pozwolą szacować rangę brzegową.

Kluczowy (elementarny) przykład:

Przykład 4.1. Jeśli $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B)$, to zbiór tensorów X-rangi co najwyżej r jest domknięty, więc X-ranga jest równa X-randze brzegowej.

Ogólnie ranga i ranga brzegowa rzadko są sobie równe na całej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}W$.

Ważne problemy:

Problem 4.2. Ustalmy $X \subset \mathbb{P}W$.

- Jaki jest *wymiar* r-tej rozmaitości siecznych? W szczególności, jakie jest najmniejsze r, takie, że $\sigma_r(X) = \mathbb{P}W$?
- Jakie są *równania* opisujące $\sigma_r(X) \subset \mathbb{P}W$?
- Dla $p \in \sigma_r(X)$, jaka może być jego ranga?

Są to często trudne pytania, ale w szczególnych sytuacjach można coś konkretnego powiedzieć. Na razie wyjaśnimy, co te pytania oznaczają.

5 Geometria algebraiczna

Uwaga 5.1. Aby twierdzenia geometrii algebraicznej powiązane z rozmaitościami siecznych miały ręce i nogi, potrzeba założyć, że ciało bazowe jest algebraicznie domknięte. Jak nie (na przykład nad $\mathbb{R}$), to z punktu widzenia tej tematyki więcej sensu ma mówienie o rozmaitościach semi-algebraicznych, czyli takich, które są opisane przez równania wielomianowe i nierówności wielomianowe, np. koło $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$ w przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^2$. Jednakże, tym tematem nie będziemy się tutaj zajmować.

Ustalmy $\mathbb{P}W$ przestrzeń rzutową. Pierścień współrzędnych jednorodnych $\mathbb{P}W$ to pierścień wielomianów T w $\dim W$ zmiennych. Zmienne interpretujemy jako funkcje liniowe na W, więc $T = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i W^*$. Jeśli $f \in T$ to f jest funkcją (wielomianową) $W \to \mathbb{C}$, ale nie wyznacza funkcji $\mathbb{P}W \to \mathbb{C}$. Jeśli $f \in T$ jest jednorodne, tzn $f \in S^i W^*$, to mamy dobrze określony zbiór zer f, jako podzbiór w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}W$. Dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{P}W$ możemy rozpatrywać

$$I(X) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left\{ f \in S^i W^* : f|_X = 0 \right\}.$$

Jest to jednorodny ideał w pierścieniu wielomianów T. Z drugiej strony, dla dowolnego ideału jednorodnego $I \subset T$, możemy rozpatrywać zbiór zer I:

$$Z(I) = \left\{ x \in \mathbb{P}W : \forall i \forall f \in I_i \subset S^i W, \quad f(x) = 0 \right\}.$$

Może się zdarzyć, że $Z(I)$ jest *przywiedlne*, to znaczy jest sumą dwóch domkniętych podzbiorów postaci $Z(I) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$ (w nietrywialny sposób, to znaczy $Z(I_1) \neq Z(I)$ oraz $Z(I_2) \neq Z(I)$). Każdy zbiór $Z(I)$ można rozłożyć na sumę podzbiorów *nieprzywiedlnych* (czyli takich, które nie mają nietrywialnego rozkładu $Z(I) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$).

Rozmaitość rzutowa, to nieprzywiedlny zbiór $X = Z(I)$ dla pewnego ideału $I \subset T$. Przez równania rozmaitości X rozumiemy generatory ideału I, takiego, że $Z(I) = X$. (Są to tak zwane *teorio-zbiorowe równania* X, można też rozważać *ideałowe równania*, czyli po prostu generatory $I(X)$.)

Uwaga na boku (na przyszłość): Jeśli X jest rozmaitością, to $I(X)$ jest ideałem pierwszym.

Jeśli $W' \subset W$ jest podprzestrzenią liniową, to mamy naturalnie $\mathbb{P}W' \subset \mathbb{P}W$. Jest to podrozmaitość i $I(\mathbb{P}W')$ jest generowane przez funkcje liniowe, te same, które definiują $W' \subset W$ jako podprzestrzeń liniową. $\mathbb{P}W'$ nazywamy liniową podprzestrzenią rzutową, lub po prostu po podprzestrzenią liniową.

Stwierdzenie 5.2. *Każda rozmaitość rzutowa X ma otwarty gęsty podzbiór punktów gładkich. To znaczy, istnieje otwarty gęsty podzbiór $X_0 \subset X$ taki, że X_0 jest* rozmaitością różniczkową, *a dokładniej* rozmaitością holomorficzną.

Definicja 5.3. *Wymiar X oznaczamy przez $\dim X$ i jest to zespolony wymiar X_0.*

Uwaga 5.4. X_0 jest spójne, gdyż X jest nieprzywiedlne i rozpatrujemy rozmaitości zespolone. Dlatego taka definicja jak wyżej ma sens i jest dobrze określona. Nad dowolnym ciałem wymiar można zdefiniować algebraicznie, a potem udowodnić, coś podobnego do podanej definicji.

Dla $\hat{p} \in W$, odpowiadającego mu $p \in \mathbb{P}W$, oraz jednorodnego wielomianu $f \in S$ możemy rozpatrywać $D_{\hat{p}} f \in W^* = S^1 W^* \subset T$ różniczkę f w punkcie p. Jeśli $T = \mathbb{C}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ (gdzie $n = \dim \mathbb{P}W$), to

$$\mathrm{D}_{\hat{p}} f = \frac{\partial f}{\partial x_0}(\hat{p}) \cdot x_0 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{p}) \cdot x_n.$$

Dla ustalonego $\hat{p}$ jest to funkcja liniowa na W. Ponadto, jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $\deg f = i > 0$ (f jest jednorodne!), to $\mathrm{D}_{\lambda\hat{p}} f = \lambda^{i-1} \mathrm{D}_{\hat{p}} f$. W szczególności, $Z(\mathrm{D}_{\hat{p}} f)$ zależy tylko od klasy $[\hat{p}] = p \in \mathbb{P}W$. Jeśli dla uproszczenia oznaczamy $Z(\mathrm{D}_p f)$.

Definicja 5.5. Przestrzenie styczne. *Niech $I(X) \subset T$ będzie ideałem rozmaitości $X \subset \mathbb{P}(W)$. Wybierzmy $x \in X_0$.*

- Afiniczna przestrzeń styczna *to liniowa podprzestrzeń $\hat{T}_x X \subset W$, zdefiniowana przez znikanie funkcji liniowych $Z(D_x f : f \in I(X))$.*
- Rzutowa przestrzeń styczna *to liniowa podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}T_x X \subset \mathbb{P}W$, zdefiniowana przez znikanie tych samych funkcji liniowych $Z(D_x f : f \in I(X))$.*

Pierwsze własności:

(i) $\mathbb{P}(\hat{T}_x X) = \mathbb{P}T_x X$.

(ii) Dla $x \in X_0$, mamy $\dim X = \dim \mathbb{P}T_x X = \dim \hat{T}_x X - 1$.

6 Odwzorowania

Rozmaitości algebraiczne, które nas będą interesować, to rozmaitości rzutowe oraz $X \setminus Y$, gdzie X i Y są rozmaitościami rzutowymi i $Y \subset X$.

Formalnie nie powiedzieliśmy sobie, co to jest odwzorowanie rozmaitości algebraicznych, rzutowych lub ich otwartych podzbiorów $X \setminus Y$. Ograniczymy się do kilku przykładów. W ogólności, zobacz dowolny podręcznik z geometrii algebraicznej, np. [BB13], [Harr95], [Hart77],...

Przykład 6.1. Jeśli X i Y są rozmaitościami rzutowymi, to produkt $X \times Y$ też jest rozmaitością rzutową:

$$X \times Y \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \subset \mathbb{P}(V \otimes W).$$

Odwzorowania rzutowania $X \times Y \to X$ oraz $X \times Y \to Y$ są odwzorowaniami rozmaitości algebraicznych.

Przykład 6.2. Jeśli A i X są podrozmaitościami rzutowymi ustalonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}W$ oraz $A \subset X$, to włożenie $A \hookrightarrow X$ jest odwzorowaniem rozmaitości algebraicznych.

Przykład 6.3. Jeśli X, Y, Z są rozmaitościami algebraicznymi, a $\phi\colon X \to Y$ i $\psi\colon Y \to Z$ są odwzorowaniami rozmaitości algebraicznych, to ich złożenie $\psi \circ \phi$ jest odwzorowaniem rozmaitości algebraicznych.

Niech $B \subset \mathbb{C}$ będzie małym dyskiem wokół 0. *Mały* oznacza, że w razie potrzeby go zmniejszamy i się nie przejmujemy. (Uwaga! B nie jest rozmaitością algebraiczną!) *Wektor styczny* do X w x, to odwzorowanie z B (parametryzowanego przez zmienną t) w małe otoczenie U punktu x w X, z dokładnością do równoważności:

$$\phi \sim \psi \Leftrightarrow \phi \text{ i } \psi \text{ mają te same wektory styczne w 0: } \frac{\partial \phi}{\partial t}(0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(0).$$

Korzystamy tu z tego, że U jest izomorficzne z podzbiorem otwartym w $\mathbb{C}^{\dim X}$.

Mówiliśmy już o rzutowej i afinicznej przestrzeni stycznej. Dla rozmaitości algebraicznej X i punktu gładkiego $x \in X$, *abstrakcyjna przestrzeń styczna* $T_x X$ (lub po prostu *przestrzeń styczna*), to przestrzeń wektorowa wymiaru $\dim X$, której elementami są wektory styczne.

Ćwiczenie 6.1. *Pokaż, że $T_p \mathbb{P}W = W/p \otimes (p)^*$, gdzie $p \in \mathbb{P}W$ jest jednocześnie $p \simeq \mathbb{C} \subset W$.*

Ćwiczenie 6.2. *Pokaż, że dla $X \subset \mathbb{P}W$ i $x \in X$ mamy $T_x X = \hat{T}_x X / x \otimes x^*$.*

Ćwiczenie 6.3. *Pokaż, że dla* $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times C) \subset \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C)$, *mamy*

$$\mathbb{P}T_{[a\otimes b\otimes c]}X = \mathbb{P}(a \otimes b \otimes C + a \otimes B \otimes c + A \otimes b \otimes c)$$

i analogicznie dla innej liczby składników.

Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem rozmaitości algebraicznych oraz $x \in X$ jest gładkim punktem takim, że $f(x) \in Y_0$ (to znaczy, $f(x)$ jest gładkim punktem Y), to mamy odwzorowanie różniczki f w punkcie x:

$$D_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y.$$

To odwzorowanie wyznaczone jest przez składanie $f \circ \phi$ z krzywymi $\phi\colon B \to X$.

Stwierdzenie 6.4. *Odwzorowanie (algebraiczne) rozmaitości algebraicznych* $\psi\colon X \to Y$ *jest* generycznie submersją *na swój obraz. Dokładniej, niech* $Z \subset Y$ *będzie domknięciem obrazu* ψ. *Wtedy istnieje otwarty gęsty podzbiór* $U \subset X_0$, *taki, że dla każdego* $x \in U$ *mamy* $\psi(x) \in Z_0$ *(czyli* $\psi(x)$ *jest gładkim punktem* Z*), oraz* $\hat{T}_{\psi(x)}Z = \mathrm{D}_x\psi(\hat{T}_x X)$.

Anty-Przykład 6.5 (Obmotka torusa, wersja rzeczywista)**.** *Mając torus* $S^1 \times S^1$, *rozważmy odwzorowanie* $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ *zadane wzorem* $t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, *dla* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Domknięcie obrazu tego odwzorowania (niealgebraicznego!!) jest całym torusem* $S^1 \times S^1$, *podczas, gdy jego różniczka* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *nie jest "na" w żadnym punkcie.*

Anty-Przykład 6.6 (Obmotka torusa, wersja holomorficzna)**.** *Rozważmy odwzorowanie* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ *zadane wzorem* $t \mapsto (e^t, e^{\alpha t})$, *dla* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Analogicznie, domknięcie obrazu tego odwzorowania niealgebraicznego jest całym* $\mathbb{C}^2$, *a jego różniczka nie jest "na".*

Treścią Stwierdzenia 6.4 jest to, że sytuacje analogiczne do Anty-Przykładów nie mogą mieć miejsca dla odwzorowań algebraicznych. Co więcej, na przykład wymiar $f(X)$ jest równy randze różniczki w ogólnym punkcie $x \in X$.

Stwierdzenie 6.7 (Lemat Terracini'ego)**.** *Istnieje otwarty gęsty podzbiór* U *rozmaitości siecznych* $\sigma_r(X)$, *taki, że dla każdego* $p \in U$, *i otwartego gęstego podzbioru przedstawień* $p \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$

$$\mathbb{P}T_p\sigma_r(X) = \langle \mathbb{P}T_{x_1}, \ldots, \mathbb{P}T_{x_r} \rangle.$$

Dowód...

Wniosek 6.8. $\dim \sigma_r(X) = \dim\langle \mathbb{P}T_{x_1}, \ldots, \mathbb{P}T_{x_r} \rangle$ *dla pewnych ogólnych punktów* $x_1, \ldots, x_r$.

Wniosek 6.9. *Dla $X \subset \mathbb{P}W$ takiego, że $\langle X \rangle = \mathbb{P}W$, mamy*

$$\dim \sigma_r(X) \le \min\{r \dim X + r - 1, \dim \mathbb{P}W\}$$

dla pewnych ogólnych punktów $x_1, \ldots, x_r$.

Definicja wymiar spodziewany, defekt...

Ćwiczenie 6.4. *Policz* $\dim \sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1}))$.

Ćwiczenie 6.5. *Policz* $\dim \sigma_2(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{l-1}))$.

Ćwiczenie 6.6. *Policz* $\dim \sigma_r(v_2(\mathbb{P}^{n-1}))$.

Ćwiczenie 6.7. *Policz* $\dim \sigma_2(v_d(\mathbb{P}^{n-1}))$.

7 Równania rozmaitości siecznych

Załóżmy, że mamy włożenie liniowe $i\colon \mathbb{P}W \to \mathbb{P}W'$, takie, że $X \subset \mathbb{P}W$ zanurza w $X' \subset \mathbb{P}W'$. Wtedy $\sigma_r(X) \subset \sigma_r(X')$. Ponadto, jeśli wiemy coś o równaniach $\sigma_r(X')$, to wiemy to samo o równaniach $\sigma_r(X)$. To znaczy, jeśli f jest wielomianem (jednorodnym) znikającym na $\sigma_r(X')$ to f znika też na $\sigma_r(X')$.

Załóżmy, że mamy włożenie liniowe $i\colon W \to A \otimes B$, takie, że $X \subset \mathbb{P}W$ zanurza w $\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B$. Niech M będzie macierzą ze współrzędnymi $(A \otimes B)^*$:

$$M := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1b} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2b} \\ \vdots & & & \\ x_{a1} & x_{a2} & \ldots & x_{ab} \end{pmatrix}$$

Odwzorowanie liniowe i indukuje dualne odwzorowanie $i^*\colon (A \otimes B)^* \to W^*$, po prostu obcięcie form liniowych do podprzestrzeni liniowych. Niech $\ell_{kl} := i^* x_{kl}$ oraz $M_W := i^* M$:

$$M := \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ldots & \ell_{1b} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ldots & \ell_{2b} \\ \vdots & & & \\ \ell_{a1} & \ell_{a2} & \ldots & \ell_{ab} \end{pmatrix}$$

Mamy $\sigma_r(X) \subset \sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B))$ oraz minory $(r+1) \times (r+1)$ macierzy M znikają na $\sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B))$, więc minory $(r+1) \times (r+1)$ macierzy M_W znikają na $\sigma_r(X)$.

Przykład 7.1 (spłaszczenia ogólnych tensorów). $W = A\otimes B\otimes C$, $i = \mathrm{id}\colon A\otimes B\otimes C \to A\otimes(B\otimes C)$, $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A\times\mathbb{P}B\times\mathbb{P}C) \hookrightarrow \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A\times\mathbb{P}(B\otimes C))$.

Przykład 7.2 (spłaszczenia tensorów symetrycznych). $W = S^dV$, $i\colon S^dV \hookrightarrow S^{d-k}V\otimes S^kV$. $X = v_d(\mathbb{P}V) \hookrightarrow \mathrm{Seg}(\mathbb{P}(S^{d-k}V)\times S^kV)$.

Definicja 7.3. *Rozmaitości podprzestrzeniowe* (ang. *subspace varieties*), to:

$$\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots} = \mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots}(A\otimes B\otimes C\otimes\cdots) \subset \mathbb{P}(A\otimes B\otimes C\otimes\cdots)$$
$$\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots} := \left\{\begin{array}{l}[\hat{T}] \mid \exists A'\subset A, B'\subset B, C'\subset C,\dots \text{ takie, że}\\ \dim A'\le a, \dim B'\le b, \dim C'\le c,\dots \text{ oraz}\\ \hat{T}\in A'\otimes B'\otimes C'\otimes\cdots\end{array}\right\}$$

lub dla tensorów symetrycznych:

$$\mathrm{Sub}_a^{sym} = \mathrm{Sub}_a^{sym}(S^dA) \subset \mathbb{P}(S^dA)$$
$$\mathrm{Sub}_a^{sym} := \left\{\begin{array}{l}[\hat{P}] \mid \exists A'\subset A \text{ takie, że}\\ \dim A'\le a \text{ oraz } \hat{P}\in S^dA'\end{array}\right\}$$

Ćwiczenie 7.1. *Ustalmy $r\in\mathbb{N}$ oraz d przestrzeni wektorowych $A, B, C,\dots$ Pokaż, że:*

(i) *Jeśli $T\in\mathbb{P}(A\otimes B\otimes C\otimes\cdots)$ i $R(T)\le r$ to $T\in\mathrm{Sub}_{r,r,r,\dots}$.*

(ii) $\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots}$ *jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{P}(A\otimes B\otimes C\otimes\cdots)$.*

(iii) $\sigma_r(\mathbb{P}A\times\mathbb{P}B\times\mathbb{P}C\times\cdots)\subset\mathrm{Sub}_{r,r,r,\dots}$.

(iv) $\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots}$ *jest zbiorem zer $(a+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $A\otimes(B\otimes C\otimes\cdots)$, $(b+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $B\otimes(A\otimes C\otimes\cdots)$, $(c+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $C\otimes(A\otimes B\otimes\cdots)$,...*

I analogiczne ćwiczenie w przypadku symetrycznym:

Ćwiczenie 7.2. *Ustalmy $r, d\in\mathbb{N}$ oraz przestrzeń wektorową A. Pokaż, że:*

(i) *Jeśli $P\in\mathbb{P}(S^dA)$ i $R(P)\le r$ to $P\in\mathrm{Sub}_r^{sym}$.*

(ii) Sub_r^{sym} *jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{P}(S^dA)$.*

(iii) $\sigma_r(v_d(\mathbb{P}A))\subset\mathrm{Sub}_r^{sym}$.

(iv) Sub_r^{sym} *jest zbiorem zer $(r+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $S^dA\hookrightarrow A\otimes(S^{d-1}A)$.*

Dziedziczenie (ang. *inheritance*).

Twierdzenie 7.4. *Niech $r < \dim A$ oraz $b := \dim B$, $c := \dim C$,... Rozważmy liniowe rzutowania $\pi \colon A \to \mathbb{C}^r$. Mamy:*

$$\sigma_r(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C \times \cdots) = \\ \mathrm{Sub}_{r,b,c,\ldots} \cap \bigcap_{\pi} (\pi \otimes \mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_C \otimes \cdots)^{-1}(\sigma_r(\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C \times \cdots)).$$

(Wystarczy rozważać rzutowania π po współrzędnych.)

Dowód...
Symetryczne dziedziczenie...

8 Abiegunowość

Niech S i T będą dwoma pierścieniami wielomianów:

$$S := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V$$
$$T := \mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V^*$$

O pierścieniu T myślimy w sposób dwojaki.

Z jednej strony, jest to pierścień współrzędnych jednorodnych na $\mathbb{P}V$. Czyli dla $\Theta \in T$ możemy myśleć o zbiorze zer Θ, jako o podzbiorze V lub $\mathbb{P}V$. Jeśli mamy skończony podzbiór $R \subset \mathbb{P}V$, to $I(R) \subset T$ jest ideałem jednorodnym wielomianów znikających na R.

Z drugiej strony, T jest pierścieniem różniczkowań na S. To znaczy α_i utożsamiamy z $\frac{\partial}{\partial x_i}$, i na przykład, dla $P \in S$:

$$(\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2^2) \lrcorner P = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_3} - 2\frac{\partial^2 P}{(\partial x_2)^2}$$

Czyli dla każdego d i i mamy dwuliniowe odwzorowanie:

$$\lrcorner \colon S^i V^* \times S^d V \to S^{d-i} V.$$

Przyjmujemy, że $S^j V = 0$ dla $j < 0$ oraz $S^0 V = \mathbb{C}$ (skalary).

Ćwiczenie 8.1. *Udowodnij następujące własności $\lrcorner$:*

(i) $\lrcorner$, *jako element*

$$\mathrm{Hom}(S^iV^* \times S^dV \to S^{d-i}V) \simeq S^dV^* \otimes S^iV \otimes S^{d-i}V \simeq \\ \mathrm{Hom}(S^dV \to S^iV \otimes S^{d-i}V),$$

jest spłaszczeniem $S^dV \hookrightarrow S^iV \otimes S^{d-i}V$.

(ii) $\lrcorner$ *jest operacją naturalną. To znaczy,* $\lrcorner$ *nie zależy od wyboru bazy* $x_1, \ldots, x_n$ *przestrzeni* V*, oraz bazy dualnej* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *przestrzeni* V^*.

(iii) $\lrcorner$ *wyznacza dualność między* S^dV *a* S^dV^**. To znaczy, odwzorowanie dwuliniowe* $\lrcorner\colon S^dV^* \times S^dV \to S^0V$ *jest niezdegenerowane.*

(iv) Dla każdego d *istnieje stała* $c \in \mathbb{C}$*, taka, że gdy* $\Theta \in S^dV^*$ *i* $\ell \in V$*, to* $\Theta \lrcorner \ell^d = c\Theta(\ell)$.

Lemat 8.1. $X \subset \mathbb{P}V$ *jest podzbiorem algebraicznym,* $v_d\colon \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(S^dV)$ *to odwzorowanie Veronese,* $I(X) \subset T$ *ideał jednorodny funkcji znikających na* X*. Wtedy:*

(i) $\langle X \rangle \subset \mathbb{P}V$ *jest równe* $Z(I(X)_1)$*, gdzie* $I(X)_1 \subset T_1 = V^*$*, oraz*

(ii) $\langle v_d(X) \rangle \subset \mathbb{P}(S^dV)$ *jest równe* $Z(I(X)_d)$*, gdzie* $I(X)_d \subset T_d = (S^dV)^*$.

Dowód. Niech $\Theta \in S^dV^*$. Mamy $\Theta \in Z(I(X)_d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\ell \in X$ $\Theta(\ell) = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\ell \in X$ zachodzi $\Theta \lrcorner \ell^d = 0$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\ell^d \in v_d(X)$ zachodzi $\Theta \lrcorner \ell^d = \Theta(\ell^d) = 0$ (to ostatnie w sensie funkcji liniowej na S^dV). $\square$

Anihilator, lub ideał apolarny wielomianu $P \in S$:

$$P^\perp := \{\Theta \in T \mid \Theta \lrcorner P = 0\}.$$

Stwierdzenie 8.2. *(i)* $P^\perp$ *jest ideałem.*

(ii) Jeśli P *jest jednorodny (czyli* $P \in S^dV$*), to* $P^\perp$ *jest ideałem jednorodnym.*

(iii) $P^\perp$ *zawiera wszystkie formy jednorodne stopnia co najmniej* $d+1$*. W szczególności,* $Z(P^\perp) = \emptyset$ *(w przestrzeni rzutowej).*

Stwierdzenie 8.3 (Lemat o Abiegunowości)**.** *Niech* $P \in S^dV$*, oraz niech* $R = \{[\ell_1], \ldots, [\ell_r]\} \subset \mathbb{P}V$ *będzie skończonym podzbiorem. Wtedy mamy równoważność:*

$$[P] \in \langle v_d(R) \rangle \iff \exists_{c_i \in \mathbb{C}}\ P = c_1\ell_1^d + \cdots + c_r\ell_r^d \iff I(R) \subset P^\perp.$$

Na przykład, jeśli $P := x^d + y^d + z^d$, to $P^\perp = (\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha^d - \beta^d, \alpha^d - \gamma^d$. Jeśli $R = \{[x], [y], [z]\}$, to $I(R) = (\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma) \subset P^\perp$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $P = c_1\ell_1^d + \cdots + c_r\ell_r^d$. Jeśli $\Theta \in S^dV^*$ oraz $\Theta(\ell) = 0$, to $\Theta \lrcorner \ell^d = 0$. Skoro mamy $I(R) = \bigcap_{i=1}^r I([\ell_i])$, to $I(R)_d \subset (P^\perp)_d$. Teraz niech $\Theta \in I(R)_i = S^iV^* \cap I(R)$ dla $i < d$. Chcemy pokazać, że $\Theta \lrcorner P = 0$. Mamy $T_{d-i} \cdot \Theta \subset I(R)_d \subset (P^\perp)_d$. Czyli $\Theta \lrcorner P$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $d - i$, którego wszystkie różniczki stopnia $d - i$ po dowolnych zmiennych są równe 0. Jest to możliwe, jedynie gdy $\Theta \lrcorner P = 0$.

Następnie załóżmy $I(R) \subset P^\perp$. W szczególności $I(R)_d \subset (P^\perp)_d$, więc $[P] \in Z(I(R)_d) = \langle v_d(R) \rangle$. □

9 Funkcja Hilberta

Rozważamy algebry ilorazowe $A_P := T/P^\perp$ oraz $A_R := T/I(R)$.

Definicja 9.1. Dla algebry z gradacją A lub ideału jednorodnego I, *funkcja Hilberta* to $H_A(i) := \dim_{\mathbb{C}} A_i$, lub $H_I(i) := \dim_{\mathbb{C}} I_i$.

Stwierdzenie 9.2. *$P \in S^dV$, R to r różnych punktów w $\mathbb{P}V$.*

(i) $H_{A_P}(i) = H_{A_P}(d - i)$.

(ii) $H_{A_R}(i) \leq r$.

(iii) dla $i \geq r - 1$ mamy $H_{A_R} = r$.

(iv) $H_{A_R}(i) \leq H_{A_R}(i + 1)$.

(v) Jeśli $[P] \in \langle v_d(R) \rangle$ to $H_{A_P} \leq H_{A_R}$ (w szczególności, ranga P jest co najmniej $\max H_{A_P}$).

Dowód (szkic). Punkt (i) wynika z symetrii. Niech

$$(\lrcorner P)_i \colon S^iV^* \to S^{d-i}V \quad \text{oraz} \quad (\lrcorner P)_{d-i} \colon S^{d-i}V^* \to S^iV,$$

wtedy $((\lrcorner P)_i)^T = (\lrcorner P)_{d-i}$. Ponadto $H_{A_P}(i)$ jest rangą odwzorowania liniowego $(\lrcorner P)_i$.

Punkt (ii): Znikanie w każdym punkcie zadaje podprzestrzeń liniowa kowymiaru 1.

Punkt (iii): redukcja do dwóch zmiennych i wyznacznik Vandermonde'a.

Punkt (iv): Wybieramy $\{\alpha = 0\}$, hiperpłaszczyznę, która nie zawiera żadnego punktu z R. Mnożenie przez α daje odwzorowanie $(T/I(R))_i \to (T/I(R))_{i+1}$, które jest włożeniem.

Punkt (v) wynika z Lematu o Abiegunowości.

□

10 Przykład: formy w dwóch zmiennych

Teraz $S := \mathbb{C}[x, y]$, a $T := \mathbb{C}[\alpha, \beta]$. Mamy $H_T = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$. Dowolny element jednorodny $\Psi \in T$ rozkłada się na iloczyn form liniowych.

Lemat 10.1. *Niech $I \subset T$ będzie ideałem jednorodnym. Jeśli $H_{T/I}(i-1) < H_{T/I}(i)$ (lub równoważnie $H_I(i-1) \geq H_I(i)$), to $I_{\leq i} = 0$.*

Dowód. Jeśli $H_{T/I}(i-1) < H_{T/I}(i)$, czyli $\dim(I_{i-1}T_1) \leq \dim I_i \leq \dim I_{i-1}$, to już $\dim(\varphi I_{i-1}) = \dim I_{i-1}$ gdzie $\varphi \in T_1$ jest dowolną niezerową formą liniową. Stąd $\varphi I_{i-1} = I_i$, czyli wszystkie elementy I_i są podzielne przez dowolne φ, co jest tylko możliwe, gdy $I_i = 0$, więc $I_{\leq i} = 0$. □

Lemat 10.2. *Niech $K \subset T_i$ będzie przestrzenią liniową wielomianów jednorodnych stopnia i. Jeśli $K \cdot T_1 \subset T_{i+1}$ ma wymiar o jeden większy niż wymiar K, oraz wielomiany z K nie mają wspólnego dzielnika, to $K = T_i$.*

Dowód. Indukcja po i. Dla $i = 0$ oraz $i = 1$ oczywiste. W ogólności, mamy przestrzeń form w K podzielnych przez α jest kowymiaru 1 w K. Niech $\alpha K' \subset K$ będzie tą podprzestrzenią, i niech $\Phi \in K \setminus K'$ będzie jedną z brakujących form (w szczególności Φ nie jest podzielne przez α). Z założenia wiemy, że $\alpha K' \cdot T_1, \alpha\Phi, \beta\Phi$ rozpinają przestrzeń wymiaru o jeden większego, niż $\dim K$. Z drugiej strony, $\beta\Phi \notin \alpha K' \cdot T_1$. Stąd $\dim(\alpha K' \cdot T_1) = \dim(K' \cdot T_1) \leq (\dim K + 1) - 1$. Jeśli $\dim(K' \cdot T_1) < \dim K$, to $K' = 0$ z Lematu 10.1, sprzeczność. Czyli z założenia indukcyjnego $K' = T_{i-1}$, więc $T = \alpha T_{i-1} + \Phi = T_i$. □

Lemat 10.3. *Niech $I \subset T$ będzie ideałem jednorodnym.*

(i) Jeśli $H_{T/I}(i-1) = H_{T/I}(i)$, to istnieje $r \leq i$, $\Psi \in T_r$, takie, że $I_{i-1} = \Psi T_{i-1-r}$ oraz $I_i = \Psi T_{i-r}$.

(ii) Jeśli $I = (\Theta_1, \Theta_2)$ oraz Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, to $H_{T/I} = (1, 2, 3, \dots, r-2, r-1, r, r, r, \dots, r, r-1, r-2, \dots, 3, 2, 1, 0 \dots)$, gdzie $r = \min(\deg\Theta_1, \deg\Theta_2)$.

Dowód. Załóżmy najpierw $H_{T/I}(i-1) = H_{T/I}(i)$, czyli

$$\dim(I_{i-1}T_1) \leq \dim I_i = \dim I_{i-1} + 1.$$

Jeśli $I_{i-1} = 0$, to I_i jest rozpięte przez jeden wielomian Ψ, który spełnia tezę lematu. Załóżmy więc, że $I_{i-1} \neq 0$. Z Lematu 10.1 wiemy więc, że $\dim I_i \neq \dim I_{i-1}$ oraz $\dim(I_{i-1}T_1) \neq \dim I_{i-1}$. Stąd $\dim(I_{i-1}T_1) = \dim I_i =$

$\dim I_{i-1} + 1$ oraz $I_{i-1}T_1) = I_i$. Niech Ψ będzie największym wspólnym dzielnikiem wielomianów z I_{i-1}. Korzystamy z Lematu 10.2 dla $K = I_{i-1}/\Psi$ i otrzymujemy $K = T_{i-1-\deg\Psi}$, czego należało dowieść.

Jeśli natomiast $I = (\Theta_1, \Theta_2)$ oraz Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, powiedzmy $r = \deg\Theta_1 \leq \deg\Theta_2$. W stopniach niższych niż r nie ma generatorów, więc mamy funkcję Hilberta T. W stopniu r mamy pierwszy generator, więc od tego momentu funkcja Hilberta jest nierosnąca na mocy Lematu 10.1. Z drugiej strony, aż do stopnia $\deg\Theta_2$, jedyne wielomiany w I to te z $\Theta_1 \cdot T$, więc funkcja Hilberta jest stała. Następnie w $\deg\Theta_2$ spada o jeden. Potem już musi być malejąca: jak nie, to na mocy pierwszej części Lematu mamy wspólny dzielnik Θ_1 i Θ_2. Znowu nie może maleć o więcej niż jeden na raz, gdyż w ideale mamy wyłącznie kombinacje liniowe $\Theta_1 \cdot T$ i $\Theta_2 \cdot T$. □

Twierdzenie 10.4. *Dla dowolnego $P \in S_d$, mamy $P^\perp = (\Theta_1, \Theta_2)$, gdzie Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników. Co więcej,* $\deg\Theta_1 + \deg\Theta_2 = d + 2$.

Dowód. Niech Θ_1 będzie generatorem $P^\perp$ najniższego stopnia, oraz $I = (\Theta_1)$, $A = T/I$. Wtedy $H_A = (1, 2, 3, \dots, r-1, r, r, r, r, \dots)$, gdzie $r = \deg\Theta_1$. Niech q będzie najmniejszym stopniem takim, że $H_{A_P} \neq H_A$. Mamy $q \geq r$, niech $\Theta_2 \in (P^\perp)_q \setminus I_q$. Używając symetrii,

$$H_{A_P} = (1, 2, 3, \dots, r-1, r, r, \dots, r, r, r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0, \dots),$$

więc $q = d - r + 2$. Jeśli Θ_1 i Θ_2 mają wspólny dzielnik Φ, to $(P^\perp)_d \supset (\Phi)_d = \Phi \cdot T_{d-\deg\Phi}$, więc $\Phi \in P^\perp$, sprzeczność. Czyli Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników i porównując funkcje Hilberta $T/(\Theta_1, \Theta_2)$ i $T/P^\perp$ otrzymujemy tezę. □

Stwierdzenie 10.5 (Twierdzenie Bertini'ego, w najprostszej wersji)**.** *Jeśli Θ_1, Θ_2 są dwoma wielomiany jednorodne stopni $d_1 \leq d_2$ bez wspólnych dzielników, to dla każdego $d \geq d_2$ istnieje niezerowy $\Phi \in (\Theta_1, \Theta_2)_d$, który nie ma wielokrotnych dzielników liniowych (czyli rozkłada się na iloczyn parami nieproporcjonalnych form liniowych). Co więcej, takich Φ jest nieskończenie wiele, jest to zbiór otwarty gęsty w $(\Theta_1, \Theta_2)_d$.*

Dowód. Można domnożyć Θ_1 przez potęgę formy liniowej, która nie dzieli Θ_2, i założyć, że $d_1 = d_2$.

Tymczasowo odjednorodniamy oba wielomiany podstawiając np. $\beta = 1$, robiąc z nich wielomiany jednej zmiennej. Dowodzimy, że istnieją $a, b \in \mathbb{C}$ takie, że $a\Theta_1 + b\Theta_2$ nie ma podwójnego zera, czyli dla pewnych a, b układ:

$$\begin{cases} a\Theta_1 &= -b\Theta_2 \\ b\Theta_2' &= -a\Theta_1' \end{cases}$$

nie ma rozwiązań. Wymnażając stronami otrzymujemy $ab(\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_1') = 0$. $\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_1' = 0$ oznacza, że pochodna ilorazu $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ jest równa zero. Ponieważ Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, to iloraz nie jest stały, więc znikanie pochodnej ilorazu może zachodzić tylko w skończenie wielu punktach $t_1, \ldots, t_l$ (niezależących od a, b).

Wróćmy do sytuacji jednorodnej. Ponieważ Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, to jakaś ich kombinacja liniowa (różna od Θ_1 i Θ_2) nie znika w żadnym z punktów $(t_1, 1), \ldots, (t_l, 1), (1, 0)$. Ta kombinacja liniowa nie ma wielokrotnych pierwiastków. $\square$

Twierdzenie 10.6 (Twierdzenie Sylvestera)**.** *Niech P będzie wielomianem jednorodnym dwóch zmiennych, a $r = \max H_{A_P}$. Wtedy*

- *Ranga brzegowa P wynosi r.*
- *Ranga P wynosi r albo $d + 2 - r$, przy czym:*
  - *Ranga P wynosi r jeśli generator $P^\perp$ stopnia r nie ma wielokrotnych pierwiastków. W tym przypadku, jeśli $2r < d + 2$, rozkład minimalny jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności i przeskalowań).*
  - *Ranga P wynosi $d + 2 - r$ jeśli generator $P^\perp$ stopnia r ma wielokrotne pierwiastki. W tym przypadku rozkład minimalny nie jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód. Liczba $r = \max H_{A_P}$ jest ograniczeniem dolnym na rangę, więc też na rangę brzegową, gdyż warunek $H_{A_P}(i) \leq r$ jest znikaniem minorów pochodzących od spłaszczeń $S^dV \to S^iV \otimes S^{d-i}V$.

Anihilator $P^\perp = (\Theta_1, \Theta_2)$, gdzie $\deg \Theta_1 = r$, a $\deg \Theta_2 = d + 2 - r$. Jeśli Θ_1 nie ma wielokrotnych pierwiastków, to dla $R = Z(\Theta_1)$ mamy $I(R) = (\Theta_1)$ i $I(R) \subset P^\perp$. Z Lematu o Abiegunowości (zobacz Stwierdzenie 8.3) mamy $P \in \langle v_d(R) \rangle$, więc ranga P jest co najwyżej $r = \#R$. Także ranga brzegowa musi być co najwyżej r, więc obie są równe r. O ile $r < d + 2 - r$, to $I(\Theta_1)$ i R są wyznaczone jednoznacznie.

Jeśli Θ_1 ma wielokrotny dzielnik, to możemy przybliżyć Θ_1 przez wielomiany Ψ_t, $\lim_{t \to 0} \Phi_t = \Theta_1$, tego samego stopnia r, które nie mają wielokrotnych pierwiastków. Definiujemy $R_t = Z(\Psi(t))$. Powłoka liniowa $\langle v_d(R_t) \rangle \subset \mathbb{P}(S^dV)$ jest równa:

$$\langle v_d(R_t) \rangle \overset{\text{Lemat 8.1}}{=} Z(I(R_t)_d) = Z(\Psi_t \cdot T_{d-r}).$$

Przypominam, że w tym miejscu $I(R_t)_d \subset S^dV^*$ oraz $\Psi_t \cdot T_{d-r} \subset S^dV^*$ (a także przestrzenie liniowe poniżej) traktujemy jako podzbiory funkcji **liniowych** na S^dV. Stąd:

$$\lim_{t\to 0}\langle v_d(R_t)\rangle = \lim_{t\to 0} Z(\Psi_t \cdot T_{d-r}) = Z((\lim_{t\to 0}\Psi_t)\cdot T_{d-r}) = \\ Z(\Theta_1 \cdot T_{d-r}) \supset Z(P^{\perp}) = [P].$$

Stąd P możemy przybliżyć wielomianami z $\langle v_d(R_t)\rangle$, które mają rangę r na mocy pierwszej części twierdzenia. Czyli ranga brzegowa P jest równa r.

Natomiast, aby policzyć rangę P, szukamy ideału $I = (\Phi)$, dla jednorodnego Φ stopnia i, takiego, że Φ nie ma wielokrotnych pierwiastków, ale $I(\Phi) \subset P^{\perp}$, czyli $\Phi \in P^{\perp}$. Jeśli $i < d+2-r$, to każdy element stopnia i w $P^{\perp}$, jest podzielny przez Θ_1, więc ma pierwiastek wielokrotny. Stąd $i \geq d+2-r$. Ale $i = d+2-r$ wystarczy na mocy Stwierdzenia 10.5 (Twierdzenia Bertini'ego). W tej sytuacji wybór (Φ) jest dowolny z otwartego gęstego podzbioru w $P^{\perp}_{d+2-r}$, niejednoznaczny, więc rozkład też nie jest jednoznaczny.

$\square$

Wniosek 10.7. *Dla $2r \leq d+2$ mamy*

$$\sigma_r(v_d(\mathbb{P}^1)) = \left\{[P] \in S^d\mathbb{C}^2 \mid r(P) \leq r \text{ lub } r(P) \geq d+2-r\right\}.$$

11 Wielomiany w większej liczbie zmiennych

Jeśli $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ dla $n \geq 3$, to znajdywanie rangi i rangi brzegowej jest trudniejsze.

Po pierwsze, struktura anihilatora nie jest koniecznie taka prosta (aczkolwiek, tak zwane *zupełne przecięcia* są anihilatorami pewnych wielomianów). Dla $n = 3$ mamy twierdzenie strukturalne dla ideałów (Buchsbaum-Eisenbud), które są anihilatorami, ale dla $n > 3$ nie ma takiej charakteryzacji.

Po drugie także struktura ideału opisującego skończone podzbiory $R \subset \mathbb{P}^{n-1}$ jest trudniejsza, są to zbiory kowymiaru $n-1$, potrzebują więc co najmniej $n-1$ generatorów, a często więcej.

Omówimy krótko (bez dowodów) te twierdzenia/lematy z poprzedniego rozdziału, które uogólniają się na wyższe wymiary.

Macaulay na początku dwudziestego wieku zbadał, jaki maksymalny wzrost może mieć funkcja Hilberta algebry z gradacją postaci T/I (lub inaczej, jaki minimalny wzrost może mieć funkcja Hilberta jednorodnego ideału I). W celu przedstawienia tego ograniczenia, zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych dodatnich k, i możemy jednoznacznie zapisać:

$$k = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \binom{a_{i-2}}{i-2} + \cdots + \binom{a_j}{j}$$

dla pewnych $a_i > a_{i-1} > a_{i-2} > \cdots > a_j > 0$ i pewnego $j > 0$. Mając taki zapis definiujemy:

$$k^{\langle i \rangle} := \binom{a_i + 1}{i+1} + \binom{a_{i-1} + 1}{i} + \binom{a_{i-2} + 1}{i-1} + \cdots + \binom{a_j + 1}{j+1}.$$

Twierdzenie 11.1 (Ograniczenie Macaulay'a)**.** *Jeśli $A = T/I$ dla ideału jednorodnego $I \subset T$, to $H_A(i+1) \leq H_A(i)^{\langle i \rangle}$.*

Dla dwóch zmiennych to się redukuje do Lematu 10.1. Ogólnie mamy, na przykład:

Wniosek 11.2. *Jeśli $A = T/I$ jak wyżej oraz $H_A(i) \leq i$, to $H_A(i+1) \leq i$.*

Co więcej, możemy powiedzieć coś o algebrach, które mają maksymalny możliwy wzrost, dzięki Twierdzeniu Gotzmanna.

Twierdzenie 11.3 (Twierdzenie Gotzmanna o nieustępliwości, ang. *Gotzmann's persistence theorem*)**.** *Dla $A = T/I$ jak wyżej, jeśli*

$$H_A(i) = H_A(i-1)^{\langle i-1 \rangle}$$

oraz I nie ma generatorów w gradacji $i+1$, to $H_A(i+1) = H_A(i)^{\langle i \rangle}$.

Innymi słowy, jeśli jakiś ideał ma minimalny wzrost w jakimś kroku, to o ile nie wpłyniemy na ten ideał z zewnątrz (dodając nowy generator), to minimalny wzrost nie będzie ustępował.

Dla $n = 2$ dostajemy mniej więcej Lematy 10.2 i 10.3.

Twierdzenie Bertini'ego w większej ogólności niż Stwierdzenie 10.5 mówi, że jeśli układ wielomianów nie ma wspólnych zer, to można wybrać kombinację F tych wielomianów, taką, że $Z(F)$ jest gładką rozmaitością i tnie transwersalnie ustaloną rozmaitość X.

12 Pfaffiany

Ustalmy $\mathbb{C}^n$ razem ze standardową bazą e_i. Macierz anty-symetryczna, z jednej strony reprezentuje element $\bigwedge^2 \mathbb{C}^n$, z drugiej strony, jak każda macierz, reprezentuje odwzorowanie liniowe $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Antysymetryczność oznacza dla tego odwzorowania, że $(Au, v) = -(u, Av)$, dla standardowego produktu skalarnego $(\cdot, \cdot)$.

Dla macierzy antysymetrycznej A definiujemy jej *Pfaffian* $\mathrm{Pf}(A)$. Dla n nieparzystego definiujemy $\mathrm{Pf}(A) := 0$. Natomiast dla $n = 2k$, podamy trzy definicje (zadanie: pokazać, że są one równoważne).

Definicja 12.1. Jeśli myślimy o $A \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{2k}$, to $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{C}$ jest taką liczbą, że:

$$\bigwedge^k A = A \wedge A \wedge \cdots \wedge A = k!\,\mathrm{Pf}(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2k}.$$

Definicja 12.2. Jeśli $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$ i przyjmując, że $a_{ii} = 0$ i $a_{ji} = -a_{ij}$, to

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{p \in S_{2k}} \mathrm{sign}(p) a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} \cdots a_{p_{2k-1} p_{2k}}.$$

(w szczególności, Pfaffian macierzy antysymetrycznej $2k \times 2k$, jest wielomianem jednorodnym stopnia k od jej współrzędnych).

Definicja 12.3 (analog rozwinięcia Laplace'a)**.** Dla $k = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, definiujemy $\mathrm{Pf}(A) = a$.

Jeśli $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$ i przyjmując, że $a_{ii} = 0$ i $a_{ji} = -a_{ij}$, to dla dowolnego $j \in \{1, \dots, 2k\}$:

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+j} a_{ij} \,\mathrm{Pf}(A_{ij}),$$

gdzie A_{ij} powstaje przez usunięcie z A dwóch wierszy i dwóch kolumn (i-tych oraz j-tych).

Ćwiczenie 12.1. *Pokazać, że trzy definicje są równoważne.*

Ćwiczenie 12.2. *Pokaż, że* $\det A = (\mathrm{Pf}\, A)^2$*. Być może pomocna wskazówka:*

$$Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \cdots \wedge Ae_n = \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

(to równanie definiuje wyznacznik).

Ćwiczenie 12.3. *Pokaż, że ranga macierzy antysymetrycznej A jest zawsze parzysta.*

Ćwiczenie 12.4. *Pokaż, że ranga macierzy antysymetrycznej $A \leq 2r$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pod-Pfaffiany główne rozmiaru $(2r+2)\times(2r+2)$ są równe zero. Wskazówka: wyraź pod-Pfaffiany główne jako współczynniki pewnego elementu odpowiedniej potęgi zewnętrznej przestrzeni $\mathbb{C}^n$.*

13 Zadania

13.1 Trzecia sieczna do powierzchni Veronese stopnia 3

V oznacza przestrzeń wektorową wymiaru 3.

Ćwiczenie 13.1. *Dla $x \in V$, $[x^3] \in v_3(\mathbb{P}V)$ policz afiniczną przestrzeń styczną $\hat{T}_{[x^3]}v_3(\mathbb{P}V)$.*

Ćwiczenie 13.2. *Policz wymiar $\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2))$. Czy jest to defektywna rozmaitość siecznych?*

Ćwiczenie 13.3. *Czy $\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^{n-1})) = \mathrm{Sub}_3^{sym}$ dla któregokolwiek $n \geq 3$?*

Ćwiczenie 13.4. *Niech $F = x^3 - y^2z \in S^3\mathbb{C}^3$. Policz anihilator $F^\perp$, rangę brzegową F oraz rangę F.*

13.2 Powierzchnia Veronese stopnia 4

Ćwiczenie 13.5. *Udowodnij, że $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) \subset \mathbb{P}(S^4\mathbb{C}^3)$ jest defektywna.*

Ćwiczenie 13.6. *Podaj przykład konkretnego $F \in S^4\mathbb{C}^3$, takiego że $[F] \notin \sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ (i uzasadnij, dlaczego nie należy).*

14 Ranga tensorów

Niech $X \subset \mathbb{P}V$ będzie podrozmaitością nie zawartą w żadnej hiperpłaszczyźnie ($I(X)_1 = 0$), oraz niech $Y = \mathbb{P}A \times X \subset \mathbb{P}(A \otimes V)$. (Na przykład $X = \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C \subset \mathbb{P}(B \otimes C)$.) Będziemy badali Y-rangi punktów $p \in \mathbb{P}(A \otimes V)$. Chcemy wyrazić je za pomocą czegoś zależnego od X.

Po pierwsze, zauważmy:

Stwierdzenie 14.1. *Załóżmy, że $A' \subset A$ jest podprzestrzenią liniową oraz $Y' = \mathbb{P}A' \times X \subset \mathbb{P}(A' \otimes V) \subset \mathbb{P}(A \otimes V)$. Jeśli $p \in \mathbb{P}(A' \otimes V)$ to $r_Y(p) = r_{Y'}(p)$ oraz $\underline{\mathbf{r}}_Y(p) = \underline{\mathbf{r}}_{Y'}(p)$.*

(Dowód jest łatwy.)

Dla dowolnego $p \in \mathbb{P}(A \otimes V)$ możemy zdefiniować podprzestrzeń liniową $p(A^*) \subset V$. Jeśli $p \in \mathbb{P}(A' \otimes V)$, to $p(A^*) = p((A')^*)$. Co więcej, dla $p, q \in \mathbb{P}(A \otimes V)$, mamy $p(A^*) = q(A^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q = g \cdot p$, gdzie $g \in GL(A)$ i $GL(A)$ działa na $A \otimes V$ przez zmianę współrzędnych na A oraz przez identyczność na V.

Dla podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ definiujemy X-rangę W jako najmniejszą liczbę r taką, że $W \subset \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ dla jakichś $x_i \in X$. W Grassmannianie $Gr(\dim W, V)$ rozpatrujemy zbiór przestrzeni liniowych rangi co najwyżej r i jego domknięcie $\sigma_{r,\dim W}(X) \subset Gr(\dim W, V)$. X-ranga brzegowa W to najmniejsze r, takie, że $W \in \sigma_{r,\dim W}(X)$.

Twierdzenie 14.2. *$r_Y(p) = r_X(p(A^*))$ oraz $\underline{\mathbf{r}}_Y(p) = \underline{\mathbf{r}}_X(p(A^*))$.*

Dowód...

Wniosek 14.3. *$r_Y(p) \leq \dim V$, np $r_{\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C}(p) \leq \dim B \dim C$.*

15 "Pęki" macierzy

W tym rozdziale zajmiemy się klasyfikacją tensorów w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$. Przypomina ona klasyfikację endomorfizmów (twierdzenie Jordana).

Określmy macierz $\epsilon \times (\epsilon + 1)$ (zależną od parametrów s i t):

$$L_\epsilon = L_\epsilon(s, t) = \begin{pmatrix} s & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & t \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 15.1 (Kronecker 1890)**.** *Dla dowolnego $p \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$ istnieje wybór baz $\mathbb{C}^b$, $\mathbb{C}^c$, taki, że $p((\mathbb{C}^2)^*)$ jest zbiorem macierzy (dla wszystkich s, t):*

$$sA + tB = \begin{pmatrix} L_{\epsilon_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & L_{\epsilon_k} & & & & \\ & & & L_{\eta_1}^T & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & L_{\eta_l}^T & \\ & & & & & & s\,\mathrm{Id}_f + tF \end{pmatrix}, \qquad (15.2)$$

gdzie F jest macierzą $f \times f$ w postaci Jordana.

Szczegółowy dowód twierdzenia Kroneckera można znaleźć na przykład w książce [Gant59, Chapt. XII]. Tutaj omówimy szkic tego dowodu.

Uwaga 15.3. Zachodzi również analogiczne twierdzenie dla pęków kwadryk, czyli dwuwymiarowych przestrzeni liniowych w $S^2\mathbb{C}^n$, zobacz [Gant59, XII.6].

Szkic dowodu twierdzenia Kroneckera, w formie ćwiczeń.

Ćwiczenie 15.1. *Załóżmy, że $b = c$ oraz $p((\mathbb{C}^2)^*)$ zawiera macierz odwracalną. Pokaż, że możemy wybrać bazy $\mathbb{C}^b$ i $\mathbb{C}^c$ takie, że $p((\mathbb{C}^2)^*) = \{s\,\mathrm{Id}_f + tF\}$, gdzie F jest w postaci Jordana.*

Jeśli $b \neq c$, lub $W = p((\mathbb{C}^2)^*)$ nie zawiera macierzy odwracalnej, to albo ranga każdej macierzy w W jest mniejsza od b albo od c. Załóżmy, że ranga jest mniejsza od c, czyli dla dowolnej macierzy w W kolumny są liniowo zależne, czyli dla każdej $M \in W$ istnieje niezerowe rozwiązanie $Mx = 0$ (dla pewnego $x \in \mathbb{C}^b$).

Ćwiczenie 15.2. *Parametryzując W przez s, t, można dobrać rozwiązanie $M(s,t)x(s,t) = 0$, gdzie $x(s,t)$ jest kolumnowym wektorem zależnym wielomianowo od (s,t). Co więcej, $x(s,t)$ jest kolumną wielomianów jednorodnych.*

Niech
$$x(s,t) = x_0 s^\epsilon - x_1 s^{\epsilon-1} t + \cdots + x_\epsilon (-t)^\epsilon$$
będzie rozwiązaniem najmniejszego możliwego stopnia ϵ, dla którego
$$M(s,t)x(s,t) = 0.$$
Zapisując $M(s,t) = sA + tB$, otrzymujemy równoważnie:
$$Ax_0 = 0, Bx_0 = Ax_1, Bx_1 = Ax_2, \ldots, Bx_{\epsilon-1} = Ax_\epsilon, Bx_\epsilon = 0.$$

Ćwiczenie 15.3. *Pokaż, że wektory $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\epsilon$ są liniowo niezależne. Wskazówka: najpierw pokaż, że $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_\epsilon$ są liniowo niezależne. W obu krokach korzystaj z minimalności ϵ.*

Wniosek 15.4. *Możemy zapisać $M(s,t)$ jako*
$$sA + tB = \begin{pmatrix} L_\epsilon(s,t) & sC + tD \\ 0 & sA' + tB' \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 15.4. *Pokaż, że $(sA' + tB')x(s,t) = 0$ nie ma (niezerowego) rozwiązania wielomianowego stopnia mniejszego niż ϵ.*

Ćwiczenie 15.5. *Pokaż, że można wybrać bazę tak, że*

$$sA + tB = \begin{pmatrix} L_\epsilon(s,t) & 0 \\ 0 & sA'' + tB'' \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 15.6. *Wywnioskuj, że Twierdzenie Kroneckera zachodzi.*

Ćwiczenie 15.7. *Pokaż, że jest tylko 9 tensorów w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ z dokładnością do działania grupy $\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_3$ (wliczając tensor zerowy). Ile jest istotnie różnych tensorów w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$?*

Ćwiczenie 15.8. *Pokaż, że dla dużych b, c, jest nieskończenie wiele tensorów w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$ różnych z dokładnością do działania grupy $\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_b \times \mathbf{GL}_c$.*

Ćwiczenie 15.9 (trudniejsze)**.** *Pokaż, że jest nieskończenie wiele tensorów w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ różnych z dokładnością do działania grupy $\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_4 \times \mathbf{GL}_4$.*

16 Rangi pęków macierzy

Ranga tensora w $A \otimes B \otimes C$ jest niezmiennicza przy działaniu grupy automorfizmów liniowych zachowujących zbiór tensorów prostych czyli w szczególności $\mathbf{GL}(A) \times \mathbf{GL}(B) \times \mathbf{GL}(C)$. W związku z tym, aby wyznaczyć rangę tensora w $\mathbb{C}^2 \otimes B \otimes C$ wystarczy wyznaczyć rangę tensora w postać normalnej Kroneckera (15.2). Tym właśnie się zajmiemy w tym rozdziale.

Twierdzenie 16.1 (Grigoriev, Ja'Ja', Teichert)**.** *[Grig78, Ja'J78, Teic86] (Co najwyżej) dwuwymiarowa podprzestrzeń macierzy w postaci normalnej* (15.2) *ma rangę, która:*

(i) jest sumą rang poszczególnych bloków L_{ϵ_i}, $L_{\eta_j}^T$, oraz $s\,\mathrm{Id} + tF$, przy czym

(ii) ranga bloku postaci L_ϵ (lub L_ϵ^T) jest równa $\epsilon + 1$, oraz

(iii) Ranga bloku $f \times f$ postaci $s\,\mathrm{Id} + tF$ wynosi $f + m(F)$, gdzie:

- *$m_{\lambda(F)}$ jest równe liczbie klatek Jordana F rozmiaru co najmniej 2×2 o wartości własnej λ,*
- *natomiast $m(F) = \max_\lambda m_\lambda(F)$.*

Sumarycznie, ranga tej przestrzeni liniowej wynosi:

$$\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i + \sum_{j=1}^{l} \eta_j + k + l + f + m(F).$$

W szczególności, maksymalna możliwa ranga tensora w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^b$ wynosi $\lfloor \frac{3b}{2} \rfloor$.

W tym rozdziale zajmiemy się dowodem tego twierdzenia. Opis jest przeprowadzony według [BL13, §5.2] lub [Land12, §10.3.3]. Trochę inne ujęcie znajdziemy w [BCS97, Chapter 19].

Na początek lemat, który pozwoli nam rozdzielić rangę na bloki.

Stwierdzenie 16.2. *Załóżmy, że $B = B_1 \oplus B_2$, $C = C_1 \oplus C_2$, $p_1 \in A \otimes B_1 \otimes C_1$, $p_2 \in A \otimes B_2 \otimes C_2$, and $p_3 \in A \otimes B_1 \otimes C_2$. Niech m_i oraz n_i będą wymiarami, odpowiednio, B_i, C_i dla $i = 1, 2$. Wtedy*

(i) Jeśli $p_2 : B_2^* \to A \otimes C_2$ jest zanurzeniem, to $r(p_1+p_2+p_3) \geq r(p_1)+m_2$.

(ii) Jeśli oba odwzorowania $p_2 : B_2^* \to A \otimes C_2$ oraz $p_2 : C_2^* \to A \otimes B_2$ są włożeniami oraz $r(p_2) = \max\{m_2, n_2\}$ (minimalna możliwa wartość dla takiego p_2), wtedy $r(p_1 + p_2) = r(p_1) + r(p_2)$.

Dowód. Aby wykazać (i) przyjmijmy $p := p_1 + p_2 + p_3$, $r := r(p)$ i zapiszmy rozkład minimalny $p = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \otimes c_i$. Rozważmy rzutowanie $\rho\colon B \to B_2$. Ponieważ $p|_{B_2^*}$ jest injekcją, możemy założyć, że $\rho(b_1), \ldots, \rho(b_{m_2})$ tworzą bazę B_2. Niech $B_2' \subset B$ będzie powłoką liniową $b_1, \ldots, b_{m_2}$. Zauważmy, że złożenie $B_1 \hookrightarrow B \to B/B_2'$ jest izomorfizmem. Przyjrzyjmy się następującemu złożeniu π:

$$A \otimes B \otimes C \to A \otimes (B/B_2') \otimes C \to A \otimes (B/B_2') \otimes C_1.$$

Jądro π zawiera $A \otimes B \otimes C_2$, oraz $\pi|_{A \otimes B_1 \otimes C_1}$ jest izomorfizmem. Stąd $\pi(p) = p_1$ (z dokładnością do izomorfizmu $B/B_2' \simeq B_1$) a także $\pi(p) = \sum_{i=m_2+1}^{r} \pi(a_i \otimes b_i \otimes c_i)$. Czyli $R(p_1) \leq r - m_2$ tak jak twierdzimy w (i).

Podpunkt (ii) wynika z (i) przy $p_3 = 0$ użytym dwukrotnie (raz przy zamienionych rolach B i C): wtedy $r(p_1+p_2) \geq r(p_1)+m_2$ oraz $r(p_1+p_2) \geq r(p_1) + n_2$. Nierówność $r(p_1 + p_2) \leq r(p_1) + r(p_2)$ zachodzi zawsze. $\square$

Ogólny pęk rozmiaru $b \times b$ jest diagonalizowalny. To znaczy, że istnieje otwarty gęsty podzbiór tensorów w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^b$, takich, które w pewnej bazie są postaci $s\,\mathrm{Id} + tF$, gdzie F jest macierzą diagonalną. Jest tak dlatego, że wielomian charakterystyczny pęku, czyli po prostu $\det(M(s,t))$, ma różne pierwiastki i jest to warunek otwarty (gęsty). W szczególności ranga takiego pęku wynosi b. Stąd wynika, że dla "większości" nie diagonalizowalnych pęków zaburzenie o mały tensorek rangi 1, uczyni pęk diagonalizowalnym. W poniższym lemacie pokazujemy, że tak rzeczywiście jest dla takich, które mają po jednej klatce Jordana dla każdej wartości własnej.

Lemat 16.3. *Załóżmy, że $p = a_1 \otimes \mathrm{Id}_b + a_2 \otimes F$, gdzie F jest $b \times b$ macierzą w postaci normalnej Jordana, dla której żadna wartość własna nie ma więcej niż jednej klatce Jordana. Wtedy $r(p) = b+1$ jeśli F nie jest diagonalna, lub $r(p) = b$ jeśli F jest diagonalna.*

Dowód. Jeśli F jest diagonalna, wtedy $r(p) = b$. W przeciwnym wypadku $r(p) \geq b+1$, więc wystarczy pokazać, że $r(p) \leq b+1$.

Ćwiczenie 16.1. *Pokaż, dla macierzy M rozmiaru $b \times b$ oraz $u, v \in \mathbb{C}^b$ zachodzi:*

(i) Jeśli M jest odwracalna, to

$$\det(M + uv^T) = (1 + v^T M^{-1} u) \det(M).$$

(ii) Jeśli M jest dowolna, to

$$\det(M + uv^T) = \det M + u^T (M^D) v, \tag{16.4}$$

gdzie M^D jest macierzą dopełnień algebraicznych.

Niech $F_{\lambda,\eta}$ będzie pojedynczą klatką Jordana rozmiaru $\eta \times \eta$, o wartości własnej λ, oraz $G_{\lambda,\eta} = s \operatorname{Id}_\eta + tF_{\lambda,\eta}$. Niech λ_i będą (różnymi) wartościami własnymi F. Mamy:

$$(G_{\lambda_i,\eta_i})^D = -\begin{pmatrix} (-s-\lambda_i t)^{\eta_i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (-s-\lambda_i t)^{\eta_i-2} t & (-s-\lambda_i t)^{\eta_i-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (-s-\lambda_i t) t^{\eta_i-2} & (-s-\lambda_i t)^2 t^{\eta_i-3} & \dots & (-s-\lambda_i t)^{\eta_i-1} & 0 \\ t^{\eta_i-1} & (-s-\lambda_i t) t^{\eta_i-2} & \dots & (-s-\lambda_i t)^{\eta_i-2} t & (-s-\lambda_i t)^{\eta_i-1} \end{pmatrix},$$

oraz $(s \operatorname{Id}_b + tF)^D$ składa się z bloków $\left(\prod_{j \neq i} -(-s - \lambda_j t)^{\eta_j}\right)(G_{\lambda_i,\eta_i})^D$ skoncentrowanych wokół przekątnej. Na przykład, jeśli $b = 5$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 3$, to:

$$M(s,t) := p(A^*) = \begin{pmatrix} \lambda_1 t + s & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 t + s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 t + s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 t + s & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 t + s \end{pmatrix} \text{ oraz}$$

$$M(s,t)^D =$$
$$\begin{pmatrix} (\lambda_1 t+s)(\lambda_2 t+s)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda_2 t+s)^3 t & (\lambda_1 t+s)(\lambda_2 t+s)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 t+s)^2(\lambda_2 t+s)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_1 t+s)^2(\lambda_2 t+s)t & (\lambda_1 t+s)^2(\lambda_2 t+s)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 t+s)^2 t^2 & -(\lambda_1 t+s)^2(\lambda_2 t+s)t & (\lambda_1 t+s)^2(\lambda_2 t+s)^2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 16.2. *Pokaż, że dla ogólnych $u, v \in \mathbb{C}^b$ wielomian jednorodny zależny od s, t postaci $u^T M(s,t)^D v$ nie ma wielokrotnych dzielników liniowych.*

Pokaż, że dla ogólnych $u, v \in \mathbb{C}^b$ wielomian jednorodny $(\lambda_1 t + s) \cdots (\lambda_k t + s) + t u^T M(s,t)^D v$ nie ma wielokrotnych dzielników liniowych.

Stąd

$$\begin{aligned}\det(M(s,t)+tuv^T) &\overset{(16.4)}{=} \det(M(s,t)) + tu^T M(s,t)^D v \\ &= (\lambda_1 t + s)\cdots(\lambda_k t + s) + tu^T M(s,t)^D v\end{aligned}$$

nie ma wielokrotnych pierwiastków i zaburzony pęk $(M(s,t)+tuv^T)$ jest diagonalizowalny, więc

$$r(p) \le r(M(s,t)+tuv^T) + r(tuv^T) \le b+1.$$

$\square$

Lemat 16.5. *Niech $p_2 \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^\epsilon \otimes \mathbb{C}^{\epsilon+1}$ będzie tensorem, którego forma normalna Kroneckera to L_ϵ. Wtedy $r(p) = \epsilon + 1$. W szczególności Stwierdzenie 16.2(ii) stosuje się do p_2. Analogicznie dla tensorów, których postać normalna to L_η^T.*

Zobacz też [BCS97, Prop. 19.9].

Dowód. Rozpatrzmy $p_2 : (\mathbb{C}^{\epsilon+1})^* \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^\epsilon$ i zdefiniujmy $E := p_2\big((\mathbb{C}^{\epsilon+1})^*\big) \subset \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^\epsilon$. Jest to podprzestrzeń liniowa

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{\epsilon-2} & \gamma_{\epsilon-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{\epsilon-1} & \gamma_\epsilon \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

W szczególności $\dim E = \epsilon+1$, więc mamy $r(p_2) = \epsilon+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}E$ jest rozpięte przez punkty z $X := Seg(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{\epsilon-1})$. Przecięcie $Z := X \cap \mathbb{P}E$ jest zdefiniowane przez 2×2 minory macierzy (16.6). Te równania definiują zbiór parametryzowany przez $(x^\epsilon, x^{\epsilon-1}y, \ldots, y^\epsilon)$. W szczególności ten zbiór rozpina E, czego należało dowieść. $\square$

Lemat 16.7 ([BCS97, Prop. 19.10])**.** *Załóżmy, że p jest pękiem $s\,\mathrm{Id}_{2n} + tF$ gdzie F jest macierzą składającą się z n klatek Jordana rozmiaru dwa, wszystkie z tą samą wartością własną. Wtedy $r(p) = 3n$.*

Dowód. Możemy wybrać bazy takie, że $p = s\,\mathrm{Id}_{2n} + tF'$, gdzie

$$s\,\mathrm{Id}_{2n} + tF = \begin{pmatrix} s\,\mathrm{Id}_n & t\,\mathrm{Id}_n \\ 0 & s\,\mathrm{Id}_n \end{pmatrix}. \tag{16.8}$$

Niech $B = B_1 \oplus B_2$ i $C = C_1 \oplus C_2$ będzie rozkładem na sumy proste odpowiadającemu tym blokom, oraz przyjmijmy $B_1 = B_2 = {C_1}^* = {C_2}^* = \mathbb{C}^n$ i

$$M = \mathrm{Id}_{2n} = \mathrm{Id}_{{C_1}^*, B_1} + \mathrm{Id}_{{C_2}^*, B_2} \in B_1 \otimes C_1 \oplus B_2 \otimes C_2, \quad N = \mathrm{Id}_{{C_2}^*, B_1} \in B_1 \otimes C_2.$$

Tutaj $\mathrm{Id}_{C_i{}^*,B_j}$ jest wyróżnionym izomorfizmem $C_i{}^* = B_j$, którego macierz jest macierzą identycznościową. Niech $A \simeq \mathbb{C}^2$. Rozważamy tensor $p \in A \otimes B \otimes C$, $p = \alpha \otimes M + \beta \otimes N$, gdzie α, β jest bazą A. Załóżmy, że $r(p) = r$. Oczywiście $r \leq 3n$. Zapiszmy $p = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i \otimes c_i$. Niech $\rho : B \to B_2$ będzie rzutowaniem z jądrem B_1. Ponieważ odwzorowanie $p \circ \rho^* : B_2^* \to A \otimes C$ jest injekcją, możemy wybrać bazę B_2 spośród zbioru $\{\rho(b_1), \ldots, \rho(b_r)\}$. Bez straty ogólności, załóżmy $\{\rho(b_1), \ldots, \rho(b_n)\}$ jest tą bazą i niech B_2' będzie powłoką liniową $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Rozważmy złożenie π:

$$C^* \xrightarrow{p} A \otimes B \to A \otimes (B/B_2'),$$

gdzie drugie odwzorowanie jest odwzorowaniem ilorazowym. Jeśli π napiszemy jako tensor, to

$$\pi = \sum_{i=n+1}^{r} a_i \otimes (b_i \mod B_2') \otimes c_i.$$

Wystarczy więc pokazać, że $r(\pi) = 2n$, lub równoważnie, że $\pi : C^* \to A \otimes (B/B_2')$ jest injektywne. Przypuśćmy, że $\gamma \in C^*$ jest w jądrze π. Wtedy $p(\gamma) \in A \otimes B_2'$. Rozłóżmy $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ zgodnie z $C^* = C_1{}^* \oplus C_2{}^*$. Następnie podstawiamy:

$$p(\gamma) = \alpha \otimes (\mathrm{Id}_{C_1{}^*,B_1} + \mathrm{Id}_{C_2{}^*,B_2})(\gamma) + \beta \otimes \mathrm{Id}_{C_2{}^*,B_1}(\gamma) = \alpha \otimes \gamma_1^{B_1} + \alpha \otimes \gamma_2^{B_2} + \beta \otimes \gamma_2^{B_1}$$

gdzie $\gamma_i^{B_j} := \mathrm{Id}_{C_i{}^*,B_j}(\gamma_i) \in B_j$. Ponieważ $p(\gamma) \in A \otimes B_2'$ i $B_1 \cap B_2' = 0$, musimy mieć $\beta \otimes \gamma_2^{B_1} = 0$, czyli $\gamma_2 = 0$. Stąd $p(\gamma) = \alpha \otimes \gamma_1^{B_1} = 0$, więc $\gamma = 0$ i π jest injektywne, tak jak twierdziliśmy, co kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 16.1. Załóżmy, że p ma postać (15.2). Zgodnie z Lematem 16.5 i Stwierdzeniem 16.2(ii):

$$\begin{aligned} r(p) = \sum_{i=1}^{k} r(L_{\epsilon_i}) + \sum_{j=1}^{l} r(L_{\eta_j}^T) + r(s\,\mathrm{Id}_f + tF) \\ = \sum_{i=1}^{k} (\epsilon_i + 1) + \sum_{j=1}^{l} (\eta_j + 1) + r(s\,\mathrm{Id}_f + tF). \end{aligned}$$

Aby pokazać tezę twierdzenia wystarczy udowodnić ją dla $p = s\,\mathrm{Id}_f + tF$.

Zamieniając kolejność klatek Jordana, możemy zapisać $F = \begin{pmatrix} F' & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, gdzie D jest macierzą przekątniową, a F' jest macierzą $f' \times f'$ złożoną wyłącznie z klatek Jordana rozmiaru co najmniej 2×2. Ranga $(s\,\mathrm{Id}_{f-f'} + tD)$ wynosi $(f - f')$ wedle Lematu 16.3, więc możemy zastosować Stwierdzenie 16.2(ii):

$$r(s\,\mathrm{Id}_f + tF) = r(s\,\mathrm{Id}_{f'} + tF') + (f - f').$$

Od tej pory zakładamy, że $F = F'$ (to nam wystarczy).

Teza twierdzenia mówi, że $r(p) = f + m(F)$, gdzie $m(F) = \max_{\lambda \in \mathbb{C}} m_\lambda(F))$, i $m_\lambda(F)$ jest liczbą klatek Jordana F o wartości własnej λ. Aby uzyskać oszacowanie górne $r(p) \leq f + m(F)$, podzielmy klatki Jordana na $m(F)$ grup $F_1, \dots, F_{m(F)}$, tak aby (po pozamienianiu kolejności klatek): $F = \begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_{m(F)} \end{pmatrix}$ oraz w każdej grupie F_α mamy co najwyżej jedna klatkę z ustaloną wartością własną. Wtedy $r(p) \leq \sum_{\alpha=1}^{m(F)} r(s \operatorname{Id} + tF_\alpha) = f + m(F)$ z Lematu 16.3.

Aby uzyskać oszacowanie dolne $r(p) \geq f + m(F)$, niech λ będzie wartością własną F, która pojawia się w $m(F)$ klatkach Jordana F. Niech G_1 będzie macierzą z $m(F)$ klatkami Jordana rozmiaru 2×2 i o wartości własnej λ. Wtedy zamieniając kolejność kolumn i wierszy: $F = \begin{pmatrix} G_1 & G_3 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$ gdzie G_2 jest macierzą w postaci Jordana. Stwierdzenie 16.2(i) możemy zastosować do $p = p_1 + p_2 + p_3$, gdzie $p_1 = s \operatorname{Id}_{2m(F)} + tG_1$, $p_2 = s \operatorname{Id}_{f-2m(F)} + tG_2$, $p_3 = tG_3$, więc:

$$r(p) \geq r(p_1) + (f - 2m(F)) \overset{\text{Lem. 16.7}}{=} 3m(F) + (f - 2m(F)) = f + m(F).$$

$\square$

17 Hipotezy Comona i Strassena — zadania

Hipoteza 17.1 (Comon)**.** *Dla dowolnego $F \in S^d V \subset V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$, mamy $r_{v_d(\mathbb{P}V)}(F) = r_{\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V \times \cdots \times \mathbb{P}V}(F)$, czyli ranga tensorowa i ranga symetryczna są równe dla tensorów symetrycznych.*

Ćwiczenie 17.1. *Udowodnij Hipotezę Comona dla*

(i) $d = 2$,

(ii) $d = 3$, $\dim V = 2$,

(iii) $F = x^2 y - z^3$.

Hipoteza 17.2 (Strassen)**.** *Niech $A = A' \oplus A''$, $B = B' \oplus B''$, $C = C' \oplus C''$. Weźmy $p' \in A' \otimes B' \otimes C'$ oraz $p'' \in A'' \otimes B'' \otimes C''$ i rozpatrujemy $p = p_1 + p_2 \in A \otimes B \times C$. Wtedy $r(p) = r(p') + r(p'')$.*

Na przykład, gdy mamy macierze M', M'', N', N'' i chcemy otrzymać wyniki mnożeń $M'N'$ oraz $M''N''$ (rozmiary macierzy dobieramy tak, żeby oba mnożenia miały sens), to wedle Hipotezy Strassena, optymalnym (ze względu na liczbę wykonywanych mnożeń liczb zespolonych) algorytmem na uzyskanie tych dwóch wyników jest wykonanie tych mnożeń osobno. A może da się lepiej?

Ćwiczenie 17.2. *Udowodnij Hipotezę Strassena dla*

(i) $\dim A'' = \dim B'' = \dim C'' = 1$ *(tak naprawdę wystarczy założyć* $\dim A'' = 1$*).*

(ii) dla tensorów $p' = p'' = a_1 \otimes b_1 \otimes c_2 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_2 \otimes b_1 \otimes c_1$.

Można też rozpatrywać warianty brzegowe obu tych hipotez. To znaczy pytamy odpowiednio, "czy symetryczna ranga brzegowa i tensorowa ranga brzegowa się pokrywają dla tensorów symetrycznych?", oraz "czy (tensorowa) ranga brzegowa $p = p' + p''$ jest sumą rang brzegowych p_1 i p_2?". Na pierwsze pytanie nie znamy jeszcze odpowiedzi. Natomiast drugie pytanie ma negatywną odpowiedź, co pokażemy w najbliższym ćwiczeniu. W języku złożoności obliczeniowej macierzy znaczy to, że (dla pewnych rozmiarów M', M'', N', N'') można szybciej przybliżyć $M'N'$ oraz $M''N''$ jednocześnie, niż gdyby przybliżać je osobno (niezależnie).

Ćwiczenie 17.3. *Rozpatrzy dwa tensory:*

- $p' = a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_2 + a_2 \otimes b_1 \otimes c_3 + a_2 \otimes b_2 \otimes c_4 \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ *to tensor mnożenia macierzy* 2×1 *przez* 1×2 *(którego wynikiem jest macierz* 2×2*).*

- $p'' = a_3 \otimes b_3 \otimes c_5 + a_4 \otimes b_4 \otimes c_5 \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^1$ *to tensor mnożenia macierzy* 1×2 *przez* 2×1 *(którego wynikiem jest macierz* 1×1*).*

Pokaż, że ranga brzegowa p' *jest równa* 4*, ranga brzegowa* p'' *jest równa* 2*, ale ranga brzegowa* $p' + p''$ *jest równa* 5*.*

18 Przedłużenia

W tym rozdziale udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 18.1 (...bibligrafia...)**.** *Niech* $X \subset \mathbb{P}V$ *będzie domkniętą podrozmaitością nie zawartą w żadnej hiperpłaszczyźnie. Wtedy* $I(\sigma_r(X))_r = 0$*, tzn nie ma równań stopnia co najwyżej* r *znikających na* $\sigma_r(X)$*.*

Aby to pokazać, opiszemy dokładnie ideał rozmaitości siecznych. Jako wynik mocno teoretyczny, jest on mało przydatny, ale akurat pozwala udowodnić Twierdzenie 18.1.

Stwierdzenie 18.2. *Niech $X \subset \mathbb{P}V$ będzie domkniętą podrozmaitością oraz $\Phi \in S^dV^*$. $\Phi \in I(\sigma_r(X))_d$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, \ldots, x_r \in \hat{X}$, oraz podziału $d = a_1 + \cdots + a_r$ (gdzie $a_i \geq 0$) mamy $\Phi \lrcorner (x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}) = 0$.*

Dowód. Φ należy do $I(\sigma_r(X))_d$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej kombinacji liniowej dowolnych r punktów z $\hat{X}$, wartość Φ na tej kombinacji wynosi 0:

$$\begin{aligned} \Phi \in I(\sigma_r(X))_d &\iff \forall_{x_1,\ldots,x_r \in \hat{X}} \forall_{s_1,\ldots,s_r \in \mathbb{C}}\ \Phi(s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_rx_r) = 0 \\ &\overset{\text{Ćw. 8.1(iv)}}{\iff} \forall_{x_1,\ldots,x_r \in \hat{X}} \forall_{s_1,\ldots,s_r \in \mathbb{C}}\ \Phi \lrcorner (s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_rx_r)^d = 0 \\ \iff \forall_{x_1,\ldots,x_r \in \hat{X}} \forall_{s_1,\ldots,s_r \in \mathbb{C}} &\sum_{a_1+\cdots+a_r=d} \binom{d}{a_1, \ldots, a_r} s_1^{a_1} \cdots s_r^{a_r} \cdot \Phi \lrcorner (x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}) = 0 \\ &\iff \forall_{x_1,\ldots,x_r \in \hat{X}} \forall_{a_1+\cdots+a_r=d}\ \Phi \lrcorner (x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}) = 0. \end{aligned}$$

□

Ponieważ w stwierdzeniu występuje jedynie $\lrcorner$ elementów stopnia d (czyli dualność między $S_d = S^dV$ i $T_d = S^dV^*$), to możemy odwrócić rolę pierścieni S i T i rozważać własność $x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \lrcorner \Phi = 0$. Czyli od teraz używamy $\lrcorner$ w odwrotną stronę, niż w rozdziałach 8, 9, 10, 11. To znaczy, różniczkujemy element T_d w kierunkach S_1.

Stwierdzenie 18.3. *Niech $X \subset \mathbb{P}V$ będzie domkniętą podrozmaitością nie zawartą w żadnej hiperpłaszczyźnie. Jeśli $\Phi \in I(\sigma_r(X))_d$, to $S_{r-1} \lrcorner \Phi \subset I(X)_{d-r+1}$ (czyli jeśli $d \geq r-1$, to wszystkie różniczki Φ stopnia co najwyżej $r-1$ znikają na X).*

Oznacza to, że ideał $I(\sigma_r(X))$ jest zawarty w $(r-1)$-wszym *przedłużeniu* ideału $I(X)$.

Dowód. Jeśli $d < r - 1$, to stwierdzenie jest trywialne. Załóżmy więc, że $d \geq r - 1$.

Ze Stwierdzenia 18.2 dla $a_1 = \cdots = a_{r-1} = 1$ oraz $a_r = d - r + 1$ mamy

$$\forall_{x_1,\ldots,x_r \in \hat{X}} x_r^{d-r+1} \lrcorner (x_1 \cdots x_{r-1} \lrcorner \Phi) = 0.$$

lub równoważnie (zobacz Ćwiczenie 8.1(iv)):

$$\forall_{x_1,\ldots,x_r\in\hat{X}}\ (x_1\cdots x_{r-1}\lrcorner\Phi)(x_r)=0$$
$$\iff \forall_{x_1,\ldots,x_{r-1}\in\hat{X}}\ (x_1\cdots x_{r-1}\lrcorner\Phi)\in I(X)_{d-r+1}.$$

Z liniowości $\lrcorner$, ponieważ $\hat{X}$ rozpina V, możemy używać zamiast x_{r-1} również kombinacji liniowych, czyli równoważnie:

$$\forall_{x_1,\ldots,x_{r-2}\in\hat{X}}\ (x_1\cdots x_{r-2}\cdot V\lrcorner\Phi)\subset I(X)_{d-r+1}.$$

Kolejno możemy podmieniać x_i na całe V i otrzymamy warunek równoważny:

$$S^{r-1}V\lrcorner\Phi\subset I(X)_{d-r+1},$$

czego należało dowieść. □

Z powyższego stwierdzenia łatwo wynika Twierdzenie 18.1:

Dowód Twierdzenia 18.1. Załóżmy, że $\Phi\in I(\sigma_r(X))_r$. Wtedy ze Stwierdzenia 18.3 mamy $S_{r-1}\lrcorner\Phi\subset I(X)_1=0$. Stąd $\Phi=0$. □

19 Spłaszczenia Younga i niezmiennik Aronholda — równania trzeciej rozmaitości siecznych

Rozpatrujemy tensory w $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$, z bazami kolejnych $\mathbb{C}^3$ oznaczanymi odpowiednio a_0,a_1,a_2, oraz b_0,b_1,b_2 i c_0,c_1,c_2, bazy dualne odpowiednio z gwiazdkami $\cdot^*$. Współrzędne na $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ oznaczamy przez $\phi_{ijk}:=a_i^*\otimes b_j^*\otimes c_k^*$. Rozpatrzmy następującą macierz 9×9 zależną liniowo od $p\in\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$:

$$M=M(p):=$$
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \phi_{000} & \phi_{010} & \phi_{020} & -\phi_{001} & -\phi_{011} & -\phi_{021}\\
0 & 0 & 0 & \phi_{100} & \phi_{110} & \phi_{120} & -\phi_{101} & -\phi_{111} & -\phi_{121}\\
0 & 0 & 0 & \phi_{200} & \phi_{210} & \phi_{220} & -\phi_{201} & -\phi_{211} & -\phi_{221}\\
-\phi_{000} & -\phi_{010} & -\phi_{020} & 0 & 0 & 0 & \phi_{002} & \phi_{012} & \phi_{022}\\
-\phi_{100} & -\phi_{110} & -\phi_{120} & 0 & 0 & 0 & \phi_{102} & \phi_{112} & \phi_{122}\\
-\phi_{200} & -\phi_{210} & -\phi_{220} & 0 & 0 & 0 & \phi_{202} & \phi_{212} & \phi_{222}\\
\phi_{001} & \phi_{011} & \phi_{021} & -\phi_{002} & -\phi_{012} & -\phi_{022} & 0 & 0 & 0\\
\phi_{101} & \phi_{111} & \phi_{121} & -\phi_{102} & -\phi_{112} & -\phi_{122} & 0 & 0 & 0\\
\phi_{201} & \phi_{211} & \phi_{221} & -\phi_{202} & -\phi_{212} & -\phi_{222} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Zwróćmy uwagę, że **nie** jest to macierz antysymetryczna.

Twierdzenie 19.1. *Dla tensorów postaci $p = u \otimes v \otimes w$, macierz $M(u \otimes v \otimes w)$ ma rząd co najwyżej 2.*

Dowód. Jeśli $u = u_0 a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2$ i analogicznie dla v, w, to $\phi_{ijk}(u \otimes v \otimes w) = u_i v_j w_k$. Mamy więc (blokowo):

$$M(u \otimes v \otimes w) := \begin{pmatrix} 0 & u_i v_j w_0 & -u_i v_j w_1 \\ -u_i v_j w_0 & 0 & u_i v_j w_2 \\ u_i v_j w_1 & -u_i v_j w_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Każde 3 kolejne wiersze są liniowo zależne, więc rząd macierzy jest co najwyżej 3 oraz (pod warunkiem, że $u \neq 0$) jest on równy rzędowi macierzy 3×9:

$$\begin{pmatrix} 0 & v_j w_0 & -v_j w_1 \\ -v_j w_0 & 0 & v_j w_2 \\ v_j w_1 & -v_j w_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podobnie możemy zredukować kolumny (jeśli $v \neq 0$) i rząd M jest równy rzędowi następującej macierzy 3×3:

$$\begin{pmatrix} 0 & w_0 & -w_1 \\ -w_0 & 0 & w_2 \\ w_1 & -w_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ale to już jest macierz anty-symetryczna, więc rząd jest parzysty, co kończy dowód. □

Wniosek 19.2. *Trzecia rozmaitość siecznych $\sigma_3(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ jest zawarta w zbiorze zer 7×7 minorów macierzy M. Czwarta rozmaitość siecznych $\sigma_4(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ jest zawarta w zbiorze zer wyznacznika M.*

Ćwiczenie 19.1. *Pokaż, że $\det M$ nie jest identycznie równy 0. W szczególności, $\sigma_4(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ jest defektywna, a macierz M nie jest antysymetryczna (nawet jeśli pozamieniamy bazy).*

Teraz przejdziemy na wariant symetryczny powyższych stwierdzeń, w którym to wariancie nieco łatwiej jest powiedzieć więcej. Rozpatrujemy wielomiany w $S^3\mathbb{C}^3$, z bazą $\mathbb{C}^3$ oznaczoną x_0, x_1, x_2, oraz bazą dualną $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Współrzędne na $S^3\mathbb{C}^3$ oznaczamy przez ψ_{ijk}, przy czym $\psi_{ijk} = \psi_{kij}$ itp. oraz dla $F \in S^3\mathbb{C}^3$ definiujemy $\psi_{ijk}(F) = \alpha_i \alpha_j \alpha_k \lrcorner F$. Rozpatrzmy następującą macierz 9×9 zależną liniowo od $F \in S^3\mathbb{C}^3$:

$$M = M(F) :=$$
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \psi_{000} & \psi_{010} & \psi_{020} & -\psi_{001} & -\psi_{011} & -\psi_{021} \\
0 & 0 & 0 & \psi_{100} & \psi_{110} & \psi_{120} & -\psi_{101} & -\psi_{111} & -\psi_{121} \\
0 & 0 & 0 & \psi_{200} & \psi_{210} & \psi_{220} & -\psi_{201} & -\psi_{211} & -\psi_{221} \\
-\psi_{000} & -\psi_{010} & -\psi_{020} & 0 & 0 & 0 & \psi_{002} & \psi_{012} & \psi_{022} \\
-\psi_{100} & -\psi_{110} & -\psi_{120} & 0 & 0 & 0 & \psi_{102} & \psi_{112} & \psi_{122} \\
-\psi_{200} & -\psi_{210} & -\psi_{220} & 0 & 0 & 0 & \psi_{202} & \psi_{212} & \psi_{222} \\
\psi_{001} & \psi_{011} & \psi_{021} & -\psi_{002} & -\psi_{012} & -\psi_{022} & 0 & 0 & 0 \\
\psi_{101} & \psi_{111} & \psi_{121} & -\psi_{102} & -\psi_{112} & -\psi_{122} & 0 & 0 & 0 \\
\psi_{201} & \psi_{211} & \psi_{221} & -\psi_{202} & -\psi_{212} & -\psi_{222} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że tym razem jest to macierz anty-symetryczna.

Twierdzenie 19.3. *Dla wielomianów postaci $F = \ell^3$, macierz $M(\ell^3)$ ma rząd co najwyżej 2.*

Dowód. Jeśli $\ell = u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2$, to $\psi_{ijk}(\ell^3) = 6u_iu_ju_k$. Mamy więc (blokowo):

$$M(\ell^3) := 6 \begin{pmatrix} 0 & u_iu_ju_0 & -u_iu_ju_1 \\ -u_iu_ju_0 & 0 & u_iu_ju_2 \\ u_iu_ju_1 & -u_iu_ju_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Każde 3 kolejne wiersze są liniowo zależne, więc rząd macierzy jest co najwyżej 3. Ale jest to macierz anty-symetryczna, więc rząd jest parzysty, co kończy dowód. □

Wniosek 19.4. *Trzecia rozmaitość siecznych $\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2))$ jest zawarta w zbiorze zer 8×8 Pfaffianów macierzy M.*

Ćwiczenie 19.2. *Pokaż, że $\dim \sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2)) = 8$, czyli $\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2)) \subset \mathbb{P}^9$ jest hiperpowierzchnia. Pokaż, że 8×8 Pfaffiany macierzy M nie są wszystkie równe identycznie 0.*

Przywołamy (bez dowodu) następujące stwierdzenie z geometrii algebraicznej.

Stwierdzenie 19.5 ([Hart77, Prop. I.1.13, Exercise I.2.8])**.** *Jeśli $Y \subset \mathbb{P}^n$ jest domkniętą podrozmaitością (algebraiczną) wymiaru $n-1$, to $I(Y)$ jest generowany przez jeden wielomian jednorodny.*

Wniosek 19.6. *Ideał $I(\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2)))$ jest generowany przez jeden wielomian jednorodny stopnia 4, który jest jednym z 8×8 Pfaffianów macierzy M.*

Dowód. Zgodnie ze Stwierdzeniem 19.5 oraz Ćwiczeniem 19.2, rozpatrywany ideał $I(\sigma_3(v_3(\mathbb{P}^2)))$ jest generowany przez jeden wielomian jednorodny Φ pewnego stopnia d. Z Twierdzenia 18.1 wynika, że $d \geq 4$, a z drugiej strony, wiemy, że 8×8 Pfaffiany M są niezerowe i należą do ideału, więc $d = 4$. W szczególności, wszystkie Pfaffiany muszą być równe $c\Phi$ dla pewnej stałej c i można przyjąć, że Φ jest jednym z tych Pfaffianów. □

Z dziedziczenia (Twierdzenie 7.4 oraz symetryczny wariant) otrzymujemy opis trzeciej rozmaitości siecznych do $v_3(\mathbb{P}^n)$:

$$\sigma_3(v_3\mathbb{P}^n) = \mathrm{Sub}_3^{sym} \cap \bigcap_{\pi} (S^3\pi)^{-1}(Z(\Phi)),$$

gdzie $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^3$ jest dowolnym rzutowaniem, a Φ jest jednym z 8×8 Pfaffianów macierzy M.

Dowód analogicznych stwierdzeń dla $\sigma_3(\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \times \mathbb{P}^c)$ jest bardziej skomplikowany.

20 Do dodania

Przykłady.

Referencje do twierdzeń w książkach.

Literatura

[BB13] Andrzej Białynicki-Birula. *Wykłady z geometrii algebraicznej.* Księgozbiór Matematyczny, tom 1. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 2013.

[BCS97] Peter Bürgisser, Michael Clausen, and M. Amin Shokrollahi. *Algebraic complexity theory*, volume 315 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. With the collaboration of Thomas Lickteig.

[BL13] Jarosław Buczyński and J.M. Landsberg. Ranks of tensors and a generalization of secant varieties. *Linear Algebra Appl.*, 438(2):668–689, 2013.

[Gant59] F. R. Gantmacher. *The theory of matrices. Vols. 1, 2.* Translated by K. A. Hirsch. Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

[Grig78] D. Yu. Grigoriev. Multiplicative complexity of a pair of bilinear forms and of the polynomial multiplication. In *Mathematical foundations of computer science, 1978 (Proc. Seventh Sympos., Zakopane, 1978)*, volume 64 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 250–256. Springer, Berlin, 1978.

[Harr95] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[Hart77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Ja'J78] Joseph Ja'Ja'. Optimal evaluation of pairs of bilinear forms. In *Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, Calif., 1978)*, pages 173–183. ACM, New York, 1978.

[Land12] J. M. Landsberg. *Tensors: geometry and applications*, volume 128 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[Stra69] Volker Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numer. Math.*, 13:354–356, 1969.

[Teic86] L. Teichert. *Die Komplexität von Bilinearformpaaren über beliebigen Korpern*. PhD thesis, Technische Universität Clausthal, 1986.

[VW02] R. C. Vaughan and T. D. Wooley. Waring's problem: a survey. In *Number theory for the millennium, III (Urbana, IL, 2000)*, pages 301–340. A K Peters, Natick, MA, 2002.