Geometria tensorów, ćwiczenia 15 grudnia 2014, Pfaffiany

Jarosław Buczyński

18 grudnia 2014

1 Pfaffiany

Ustalmy $\mathbb{C}^n$ razem ze standardową bazą e_i. Macierz anty-symetryczna, z jednej strony reprezentuje element $\bigwedge^2 \mathbb{C}^n$, z drugiej strony, jak każda macierz, reprezentuje odwzorowanie liniowe $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Antysymetryczność oznacza dla tego odwzorowania, że $(Au, v) = -(u, Av)$, dla standardowego produktu skalarnego $(\cdot, \cdot)$.

Dla macierzy antysymetrycznej A definiujemy jej *Pfaffian* $\mathrm{Pf}(A)$. Dla n nieparzystego definiujemy $\mathrm{Pf}(A) := 0$. Natomiast dla $n = 2k$, podamy trzy definicje (zadanie: pokazać, że są one równoważne).

Definicja 1.1. Jeśli myślimy o $A \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{2k}$, to $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{C}$ jest taką liczbą, że:

$$\bigwedge^k A = A \wedge A \wedge \cdots \wedge A = k!\,\mathrm{Pf}(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2k}.$$

Definicja 1.2. Jeśli $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$ i przyjmując, że $a_{ii} = 0$ i $a_{ji} = -a_{ij}$, to

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{p \in S_{2k}} \mathrm{sign}(p) a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} \cdots a_{p_{2k-1} p_{2k}}.$$

(w szczególności, Pfaffian macierzy antysymetrycznej $2k \times 2k$, jest wielomianem jednorodnym stopnia k od jej współrzędnych).

Definicja 1.3 (analog rozwinięcia Laplace'a)**.** Dla $k = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, definiujemy $\mathrm{Pf}(A) = a$.

Jeśli $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$ i przyjmując, że $a_{ii} = 0$ i $a_{ji} = -a_{ij}$, to dla dowolnego $j \in \{1, \dots, 2k\}$:

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+j} a_{ij} \, \mathrm{Pf}(A_{ij}),$$

gdzie A_{ij} powstaje przez usunięcie z A dwóch wierszy i dwóch kolumn (i-tych oraz j-tych).

Ćwiczenie 1.1. *Pokazać, że trzy definicje są równoważne.*

Ćwiczenie 1.2. *Pokaż, że* $\det A = (\mathrm{Pf}\, A)^2$. *Być może pomocna wskazówka:*

$$Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \cdots \wedge Ae_n = \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

(to równanie definiuje wyznacznik).

Ćwiczenie 1.3. *Pokaż, że ranga macierzy antysymetrycznej A jest zawsze parzysta.*

Ćwiczenie 1.4. *Pokaż, że ranga macierzy antysymetrycznej $A \leq 2r$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pod-Pfaffiany główne rozmiaru $(2r+2) \times (2r+2)$ są równe zero. Wskazówka: wyraź pod-Pfaffiany główne jako współczynniki pewnego elementu odpowiedniej potęgi zewnętrznej przestrzeni $\mathbb{C}^n$.*