Geometria tensorów, wykład 18 grudnia 2014

Jarosław Buczyński

18 grudnia 2014

1 Przypomnienie z poprzedniego wykładu

Stwierdzenie 1.1 (Lemat o Abiegunowości)**.** *Niech $P \in S^d V$, oraz niech $R = \{[\ell_1], \dots, [\ell_r]\} \subset \mathbb{P}V$ będzie skończonym podzbiorem. Wtedy mamy równoważność:*

$$[P] \in \langle v_d(R) \rangle \iff \exists_{c_i \in \mathbb{C}}\ P = c_1 \ell_1^d + \cdots + c_r \ell_r^d \iff I(R) \subset P^{\perp}.$$

Teraz $S := \mathbb{C}[x, y]$, a $T := \mathbb{C}[\alpha, \beta]$.

Lemat 1.2. *Niech $I \subset T$ bedzie ideałem jednorodnym. Jeśli $H_{T/I}(i-1) < H_{T/I}(i)$ (lub równoważnie $H_I(i-1) \geq H_I(i)$), to $I_{\leq i} = 0$.*

Lemat 1.3. *Niech $K \subset T_i$ będzie przestrzenią liniową wielomianów jednorodnych stopnia i. Jeśli $K \cdot T_1 \subset T_{i+1}$ ma wymiar o jeden większy niż wymiar K, oraz wielomiany z K nie mają wspólnego dzielnika, to $K = T_i$.*

2 Przykład: formy w dwóch zmiennych, ciąg dalszy

Lemat 2.1. *Niech $I \subset T$ bedzie ideałem jednorodnym.*

(i) Jeśli $H_{T/I}(i-1) = H_{T/I}(i)$, to istnieje $r \leq i$, $\Psi \in T_r$, takie, że $I_{i-1} = \Psi T_{i-1-r}$ oraz $I_i = \Psi T_{i-r}$.

(ii) Jeśli $I = (\Theta_1, \Theta_2)$ oraz Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, to $H_{T/I} = (1, 2, 3, \dots, r-2, r-1, r, r, r, \dots, r, r-1, r-2, \dots, 3, 2, 1, 0 \dots)$, gdzie $r = \min(\deg \Theta_1, \deg \Theta_2)$.

Dowód. Załóżmy najpierw $H_{T/I}(i-1) = H_{T/I}(i)$, czyli

$$\dim(I_{i-1}T_1) \leq \dim I_i = \dim I_{i-1} + 1.$$

Jeśli $I_{i-1} = 0$, to I_i jest rozpięte przez jeden wielomian Ψ, który spełnia tezę lematu. Załóżmy więc, że $I_{i-1} \neq 0$. Z Lematu 1.2 wiemy więc, że $\dim I_i \neq \dim I_{i-1}$ oraz $\dim(I_{i-1}T_1) \neq \dim I_{i-1}$. Stąd $\dim(I_{i-1}T_1) = \dim I_i = \dim I_{i-1} + 1$ oraz $I_{i-1}T_1) = I_i$. Niech Ψ będzie największym wspólnym dzielnikiem wielomianów z I_{i-1}. Korzystamy z Lematu 1.3 dla $K = I_{i-1}/\Psi$ i otrzymujemy $K = T_{i-1-\deg\Psi}$, czego należało dowieść.

Jeśli natomiast $I = (\Theta_1, \Theta_2)$ oraz Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, powiedzmy $r = \deg\Theta_1 \leq \deg\Theta_2$. W stopniach niższych niż r nie ma generatorów, więc mamy funkcję Hilberta T. W stopniu r mamy pierwszy generator, więc od tego momentu funkcja Hilberta jest nierosnąca na mocy Lematu 1.2. Z drugiej strony, aż do stopnia $\deg\Theta_2$, jedyne wielomiany w I to te z $\Theta_1 \cdot T$, więc funkcja Hilberta jest stała. Następnie w $\deg\Theta_2$ spada o jeden. Potem już musi być malejąca: jak nie, to na mocy pierwszej części Lematu mamy wspólny dzielnik Θ_1 i Θ_2. Znowu nie może maleć o więcej niż jeden na raz, gdyż w ideale mamy wyłącznie kombinacje liniowe $\Theta_1 \cdot T$ i $\Theta_2 \cdot T$. □

Twierdzenie 2.2. *Dla dowolnego $P \in T_d$, mamy $P^\perp = (\Theta_1, \Theta_2)$, gdzie Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników. Co więcej,* $\deg\Theta_1 + \deg\Theta_2 = d + 2$.

Dowód. Niech Θ_1 będzie generatorem $P^\perp$ najniższego stopnia, oraz $I = (\Theta_1)$, $A = T/I$. Wtedy $H_A = (1, 2, 3, \ldots, r-1, r, r, r, r, \ldots)$, gdzie $r = \deg\Theta_1$. Niech q będzie najmniejszym stopniem takim, że $H_{A_P} \neq H_A$. Mamy $q \geq r$, niech $\Theta_2 \in (P^\perp)_q \setminus I_q$. Używając symetrii,

$$H_{A_P} = (1, 2, 3, \ldots, r-1, r, r, \ldots, r, r, r-1, r-2, \ldots, 2, 1, 0, \ldots),$$

więc $q = d - r + 2$. Jeśli Θ_1 i Θ_2 mają wspólny dzielnik Φ, to $(P^\perp)_d \supset (\Phi)_d = \Phi \cdot T_{d-\deg\Phi}$, więc $\Phi \in P^\perp$, sprzeczność. Czyli Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników i porównując funkcje Hilberta $T/(\Theta_1, \Theta_2)$ i $T/P^\perp$ otrzymujemy tezę. □

Stwierdzenie 2.3 (Twierdzenie Bertini'ego, w najprostszej wersji)**.** *Jeśli Θ_1, Θ_2 są dwoma wielomiany jednorodne stopni $d_1 \leq d_2$ bez wspólnych dzielników, to dla każdego $d \geq d_2$ istnieje niezerowy $\Phi \in (\Theta_1, \Theta_2)_d$, który nie ma wielokrotnych dzielników liniowych (czyli rozkłada się na iloczyn parami nieproporcjonalnych form liniowych). Co więcej, takich Φ jest nieskończenie wiele, jest to zbiór otwarty gęsty w $(\Theta_1, \Theta_2)_d$.*

Dowód. Można domnożyć Θ_1 przez potęgę formy liniowej, która nie dzieli Θ_2, i założyć, że $d_1 = d_2$.

Tymczasowo odjednorodniamy oba wielomiany podstawiając np. $\beta = 1$, robiąc z nich wielomiany jednej zmiennej. Dowodzimy, że istnieją $a, b \in \mathbb{C}$ takie, że $a\Theta_1 + b\Theta_2$ nie ma podwójnego zera, czyli dla pewnych a, b układ:

$$\begin{cases} a\Theta_1 &= -b\Theta_2 \\ b\Theta_2' &= -a\Theta_1' \end{cases}$$

nie ma rozwiązań. Wymnażając stronami otrzymujemy $ab(\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_1') = 0$. $\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_1' = 0$ oznacza, że pochodna ilorazu $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ jest równa zero. Ponieważ Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, to iloraz nie jest stały, więc znikanie pochodnej ilorazu może zachodzić tylko w skończenie wielu punktach $t_1, \ldots, t_l$ (niezależących od a, b).

Wróćmy do sytuacji jednorodnej. Ponieważ Θ_1 i Θ_2 nie mają wspólnych dzielników, to jakaś ich kombinacja liniowa (różna od Θ_1 i Θ_2) nie znika w żadnym z punktów $(t_1, 1), \ldots, (t_l, 1), (1, 0)$. Ta kombinacja liniowa nie ma wielokrotnych pierwiastków. $\square$

Twierdzenie 2.4 (Twierdzenie Sylvestera)**.** *Niech P będzie wielomianem jednorodnym dwóch zmiennych, a $r = \max H_{A_P}$. Wtedy*

- *Ranga brzegowa P wynosi r.*
- *Ranga P wynosi r albo $d + 2 - r$, przy czym:*
  - *Ranga P wynosi r jeśli generator $P^\perp$ stopnia r nie ma wielokrotnych pierwiastków. W tym przypadku, jeśli $2r < d + 2$, rozkład minimalny jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności i przeskalowań).*
  - *Ranga P wynosi $d + 2 - r$ jeśli generator $P^\perp$ stopnia r ma wielokrotne pierwiastki. W tym przypadku rozkład minimalny nie jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód. Liczba $r = \max H_{A_P}$ jest ograniczeniem dolnym na rangę, więc też na rangę brzegową, gdyż warunek $H_{A_P}(i) \leq r$ jest znikaniem minorów pochodzących od spłaszczeń $S^dV \to S^iV \otimes S^{d-i}V$.

Anihilator $P^\perp = (\Theta_1, \Theta_2)$, gdzie $\deg \Theta_1 = r$, a $\deg \Theta_2 = d + 2 - r$. Jeśli Θ_1 nie ma wielokrotnych pierwiastków, to dla $R = Z(\Theta_1)$ mamy $I(R) = (\Theta_1)$ i $I(R) \subset P^\perp$. Z Lematu o Abiegunowości (zobacz Stwierdzenie 1.1) mamy $P \in \langle v_d(R) \rangle$, więc ranga P jest co najwyżej $r = \#R$. Także ranga brzegowa musi być co najwyżej r, więc obie są równe r. O ile $r < d + 2 - r$, to $I(\Theta_1)$ i R są wyznaczone jednoznacznie.

Jeśli Θ_1 ma wielokrotny dzielnik, to możemy przybliżyć Θ_1 przez wielomiany Ψ_t tego samego stopnia r, które nie mają wielokrotnych pierwiastków. Wtedy definijemy $R_t = Z(\Psi(t))$ i sprawdzamy, że $P \in \lim_t \langle v_d(R_t) \rangle$. Stąd ponownie ranga brzegowa P jest równa r.

Natomiast, aby policzyć rangę P, szukamy ideału $I = (\Phi)$, dla jednorodnego Φ stopnia i, takiego, że Φ nie ma wielokrotnych pierwiastków, ale $I(\Phi) \subset P^\perp$, czyli $\Phi \in P^\perp$. Jeśli $i < d+2-r$, to każdy element stopnia i w $P^\perp$, jest podzielny przez Θ_1, więc ma pierwiastek wielokrotny. Stąd $i \geq d+2-r$. Ale $i = d+2-r$ wystarczy na mocy Stwierdzenia 2.3 (Twierdzenia Bertini'ego). W tej sytuacji wybór (Φ) jest dowolny z otwartego gęstego podzbioru w $P^\perp_{d+2-r}$, niejednoznaczny, więc rozkład też nie jest jednoznaczny.

$\square$

Wniosek 2.5. *Dla* $2r \leq d+2$ *mamy*

$$\sigma_r(v_d(\mathbb{P}^1)) = \left\{ [P] \in S^d\mathbb{C}^2 \mid R(P) \leq r \text{ } \textit{lub} \text{ } R(P) \geq d+2-r \right\}.$$