Geometria tensorów

Jarosław Buczyński

8 grudnia 2014

1 Abiegunowość

Niech S i T będą dwoma pierścieniami wielomianów:

$$S := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V$$

$$T := \mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V^*$$

O pierścieniu T myślimy w sposób dwojaki.

Z jednej strony, jest to pierścień współrzędnych jednorodnych na $\mathbb{P}V$. Czyli dla $\Theta \in T$ możemy myśleć o zbiorze zer Θ, jako o podzbiorze V lub $\mathbb{P}V$. Jeśli mamy skończony podzbiór $R \subset \mathbb{P}V$, to $I(R) \subset T$ jest ideałem jednorodnym wielomianów znikających na R.

Z drugiej strony, T jest pierścieniem różniczkowań na S. To znaczy α_i utożsamiamy z $\frac{\partial}{\partial x_i}$, i na przykład, dla $P \in S$:

$$(\alpha_1 \alpha_3 - 2\alpha_2^2) \lrcorner P = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_3} - 2\frac{\partial^2 P}{(\partial x_2)^2}$$

Czyli dla każdego d i i mamy dwuliniowe odwzorowanie:

$$\lrcorner \colon S^i V^* \times S^d V \to S^{d-i} V.$$

Przyjmujemy, że $S^j V = 0$ dla $j < 0$ oraz $S^0 V = \mathbb{C}$ (skalary).

Ćwiczenie 1.1. *(i) Pokaż, że $\lrcorner$, jako element*

$$\mathrm{Hom}(S^i V^* \times S^d V \to S^{d-i} V) \simeq S^d V^* \otimes S^i V \otimes S^{d-i} V \simeq \mathrm{Hom}(S^d V \to S^i V \otimes S^{d-i} V),$$

jest spłaszczeniem $S^d V \hookrightarrow S^i V \otimes S^{d-i} V$.

(ii) *Pokaż, że* $\lrcorner$ *jest operacją naturalną. To znaczy,* $\lrcorner$ *nie zależy od wyboru bazy* $x_1, \ldots, x_n$ *przestrzeni* V*, oraz bazy dualnej* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *przestrzeni* V^**.*

(iii) *Pokaż, że* $\lrcorner$ *wyznacza dualność między* S^dV *a* S^dV^**. To znaczy, odwzorowanie dwuliniowe* $\lrcorner \colon S^dV^* \times S^dV \to S^0V$ *jest niezdegenerowane.*

(iv) *Pokaż, że dla każdego d istnieje stała* $c \in \mathbb{C}$*, taka, że gdy* $\Theta \in S^dV^*$ *i* $\ell \in V$*, to* $\Theta \lrcorner \ell^d = c\Theta(\ell)$*.*

Lemat 1.1. *$X \subset \mathbb{P}V$ jest podzbiorem algebraicznym, $v_d \colon \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(S^dV)$ to odwzorowanie Veronese, $I(X) \subset T$ ideał jednorodny funkcji znikających na X. Wtedy:*

(i) *$\langle X \rangle \subset \mathbb{P}V$ jest równe $Z(I(X)_1)$, gdzie $I(X)_1 \subset T_1 = V^*$, oraz*

(ii) *$\langle v_d(X) \rangle \subset \mathbb{P}(S^dV)$ jest równe $Z(I(X)_d)$, gdzie $I(X)_d \subset T_d = (S^dV)^*$.*

Dowód. Niech $\Theta \in S^dV^*$. Mamy $\Theta \in Z(I(X)_d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\ell \in X$ $\Theta(\ell) = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\ell \in X$ zachodzi $\Theta \lrcorner \ell^d = 0$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\ell^d \in v_d(X)$ zachodzi $\Theta \lrcorner \ell^d = \Theta(\ell^d) = 0$ (to ostatnie w sensie funkcji liniowej na S^dV). $\square$

Anihilator, lub ideał apolarny wielomianu $P \in S$:

$$P^\perp := \{\Theta \in T \mid \Theta \lrcorner P = 0\}.$$

Stwierdzenie 1.2. (i) *$P^\perp$ jest ideałem.*

(ii) *Jeśli P jest jednorodny (czyli $P \in S^dV$), to $P^\perp$ jest ideałem jednorodnym.*

(iii) *$P^\perp$ zawiera wszystkie formy jednorodne stopnia co najmniej $d+1$. W szczególności, $Z(P^\perp) = \emptyset$ (w przestrzeni rzutowej).*

Stwierdzenie 1.3 (Lemat o Abiegunowości)**.** *Niech $P \in S^dV$, oraz niech $R = \{[\ell_1], \ldots, [\ell_r]\} \subset \mathbb{P}V$ będzie skończonym podzbiorem. Wtedy mamy równoważność:*

$$[P] \in \langle v_d(R) \rangle \iff \exists_{c_i \in \mathbb{C}}\ P = c_1\ell_1^d + \cdots + c_r\ell_r^d \iff I(R) \subset P^\perp.$$

Na przykład, jeśli $P := x^d + y^d + z^d$, to $P^\perp = (\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha^d - \beta^d, \alpha^d - \gamma^d$. Jeśli $R = \{[x], [y], [z]\}$, to $I(R) = (\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma) \subset P^\perp$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $P = c_1\ell_1^d + \cdots + c_r\ell_r^d$. Jeśli $\Theta \in S^dV^*$ oraz $\Theta(\ell) = 0$, to $\Theta \lrcorner \ell^d = 0$. Skoro mamy $I(R) = \bigcap_{i=1}^r I([\ell_i])$, to $I(R)_d \subset (P^\perp)_d$. Teraz niech $\Theta \in I(R)_i = S^iV^* \cap I(R)$ dla $i < d$. Chcemy pokazać, że $\Theta \lrcorner P = 0$. Mamy $T_{d-i} \cdot \Theta \subset I(R)_d \subset (P^\perp)_d$. Czyli $\Theta \lrcorner P$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $d - i$, którego wszystkie różniczki stopnia $d - i$ po dowolnych zmiennych są równe 0. Jest to możliwe, jedynie gdy $\Theta \lrcorner P = 0$.

Następnie załóżmy $I(R) \subset P^\perp$. W szczególności $I(R)_d \subset (P^\perp)_d$, więc $[P] \in Z(I(R)_d) = \langle v_d(R) \rangle$. $\square$

2 Funkcja Hilberta

Rozważamy algebry ilorazowe $A_P := T/P^\perp$ oraz $A_R := T/I(R)$.

Definicja 2.1. Dla algebry z gradacją A lub ideału jednordnego I, *funkcja Hilberta* to $H_A(i) := \dim_{\mathbb{C}} A_i$, lub $H_I(i) := \dim_{\mathbb{C}} I_i$.

Stwierdzenie 2.2. *$P \in S^dV$, R to r różnych punktów w $\mathbb{P}V$.*

(i) $H_{A_P}(i) = H_{A_P}(d - i)$.

(ii) $H_{A_R}(i) \leq r$.

(iii) dla $i \geq r - 1$ mamy $H_{A_R} = r$.

(iv) $H_{A_R}(i) \leq H_{A_R}(i + 1)$.

(v) Jeśli $[P] \in \langle v_d(R) \rangle$ to $H_{A_P} \leq H_{A_R}$ (w szczególności, ranga P jest co najmniej $\max H_{A_P}$).

Dowód (szkic). Punkt (i) wynika z symetrii. Niech

$$(\lrcorner P)_i \colon S^iV^* \to S^{d-i}V \quad \text{oraz} \quad (\lrcorner P)_{d-i} \colon S^{d-i}V^* \to S^iV,$$

wtedy $((\lrcorner P)_i)^T = (\lrcorner P)_{d-i}$. Ponadto $H_{A_P}(i)$ jest rangą odwzorowania liniowego $(\lrcorner P)_i$.

Punkt (ii): Znikanie w każdym punkcie zadaje podprzestrzeń liniowa kowymiaru 1.

Punkt (iii): redukcja do dwóch zmiennych i wyznacznik Vandermonde'a.

Punkt (iv): Wybieramy $\{\alpha = 0\}$, hiperpłaszczyznę, która nie zawiera żadnego punktu z R. Mnożenie przez α daje odwzorowanie $(T/I(R))_i \to (T/I(R))_{i+1}$, które jest włożeniem.

Punkt (v) wynika z Lematu o Abiegunowości.

$\square$

3 Przykład: formy w dwóch zmiennych

Teraz $S := \mathbb{C}[x, y]$, a $T := \mathbb{C}[\alpha, \beta]$. Mamy $H_T = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$. Dowolny element jednorodny $\Psi \in T$ rozkłada się na iloczyn form liniowych.

Lemat 3.1. *Niech $I \subset T$ bedzie ideałem jednorodnym. Jeśli $H_{T/I}(i-1) < H_{T/I}(i)$ (lub równoważnie $H_I(i-1) \geq H_I(i)$), to $I_{\leq i} = 0$.*

Dowód. Jeśli $H_{T/I}(i-1) < H_{T/I}(i)$, czyli $\dim(I_{i-1}T_1) \leq \dim I_i \leq \dim I_{i-1}$, to już $\dim(\varphi I_{i-1}) = \dim I_{i-1}$ gdzie $\varphi \in T_1$ jest dowolną niezerową formą liniową. Stąd $\varphi I_{i-1} = I_i$, czyli wszystkie elementy I_i są podzielne przez dowolne φ, co jest tylko możliwe, gdy $I_i = 0$, więc $I_{\leq i} = 0$. $\square$

Lemat 3.2. *Niech $K \subset T_i$ będzie przestrzenią liniową wielomianów jednorodnych stopnia i. Jeśli $K \cdot T_1 \subset T_{i+1}$ ma wymiar o jeden większy niż wymiar K, oraz wielomiany z K nie mają wspólnego dzielnika, to $K = T_i$.*

Dowód. Indukcja po i. Dla $i = 0$ oraz $i = 1$ oczywiste. W ogólności, mamy przestrzeń form w K podzielnych przez α jest kowymiaru 1 w K. Niech $\alpha K' \subset K$ będzie tą podprzestrzenią, i niech $\Phi \in K \setminus K'$ będzie jedną z brakujących form (w szczególności Φ nie jest podzielne przez α). Z założenia wiemy, że $\alpha K' \cdot T_1, \alpha\Phi, \beta\Phi$ rozpinają przestrzeń wymiaru o jeden większego, niż $\dim K$. Z drugiej strony, $\beta\Phi \notin \alpha K' \cdot T_1$. Stąd $\dim(\alpha K' \cdot T_1) = \dim(K' \cdot T_1) \leq (\dim K + 1) - 1$. Jeśli $\dim(K' \cdot T_1) < \dim K$, to $K' = 0$ z Lematu 3.1, sprzeczność. Czyli z założenia indukcyjnego $K' = T_{i-1}$, więc $T = \alpha T_{i-1} + \Phi = T_i$. $\square$