Geometria tensorów

Jarosław Buczyński

4 grudnia 2014

1 Równania rozmaitości siecznych

Załóżmy, że mamy włożenie liniowe $i\colon \mathbb{P}W \to \mathbb{P}W'$, takie, że $X \subset \mathbb{P}W$ zanuża w $X' \subset \mathbb{P}W'$. Wtedy $\sigma_r(X) \subset \sigma_r(X')$. Ponadto, jeśli wiemy coś o równaniach $\sigma_r(X')$, to wiemy to samo o równaniach $\sigma_r(X)$. To znaczy, jeśli f jest wielomianem (jednorodnym) znikającym na $\sigma_r(X')$ to f znika też na $\sigma_r(X')$.

Załóżmy, że mamy włożenie liniowe $i\colon W \to A \otimes B$, takie, że $X \subset \mathbb{P}W$ zanuża w $\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B$. Niech M będzie macierzą ze współrzędnymi $(A \otimes B)^*$:

$$M := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1b} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2b} \\ \vdots & & & \\ x_{a1} & x_{a2} & \dots & x_{ab} \end{pmatrix}$$

Odwzorowanie liniowe i indukuje dualne odwzorowanie $i^*\colon (A \otimes B)^* \to W^*$, po prostu obcięcie form liniowych do podprzestrzeni liniowych. Niech $\ell_{kl} := i^* x_{kl}$ oraz $M_W := i^* M$:

$$M := \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \dots & \ell_{1b} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \dots & \ell_{2b} \\ \vdots & & & \\ \ell_{a1} & \ell_{a2} & \dots & \ell_{ab} \end{pmatrix}$$

Mamy $\sigma_r(X) \subset \sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B))$ oraz minory $(r+1) \times (r+1)$ macierzy M znikają na $\sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B))$, więc minory $(r+1) \times (r+1)$ macierzy M_W znikają na $\sigma_r(X)$.

Przykład 1.1 (spłaszczenia ogólnych tensorów). $W = A \otimes B \otimes C$, $i = \mathrm{id}\colon A \otimes B \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$, $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C) \hookrightarrow \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}(B \otimes C))$.

Przykład 1.2 (spłaszczenia tensorów symetrycznych). $W = S^dV$, $i\colon S^dV \hookrightarrow S^{d-k}V \otimes S^kV$. $X = v_d(\mathbb{P}V) \hookrightarrow \mathrm{Seg}(\mathbb{P}(S^{d-k}V) \times S^kV)$.

Definicja 1.3. *Rozmaitości podprzestrzeniowe* (ang. *subspace varieties*), to:

$$\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots} = \mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots}(A \otimes B \otimes C \otimes \cdots) \subset \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C \otimes \cdots)$$

$$\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots} := \left\{ \begin{array}{l} [\hat{T}] \mid \exists A' \subset A, B' \subset B, C' \subset C, \dots \text{ takie, że} \\ \dim A' \leq a, \dim B' \leq b, \dim C' \leq c, \dots \text{ oraz} \\ \hat{T} \in A' \otimes B' \otimes C' \otimes \cdots \end{array} \right\}$$

lub dla tensorów symetrycznych:

$$\mathrm{Sub}_a^{sym} = \mathrm{Sub}_a^{sym}(S^dA) \subset \mathbb{P}(S^dA)$$

$$\mathrm{Sub}_a^{sym} := \left\{ \begin{array}{l} [\hat{P}] \mid \exists A' \subset A \text{ takie, że} \\ \dim A' \leq a \text{ oraz } \hat{P} \in S^dA' \end{array} \right\}$$

Ćwiczenie 1.1. *Ustalmy $r \in \mathbb{N}$ oraz d przestrzeni wektorowych $A, B, C, \dots$ Pokaż, że:*

(i) *Jeśli $T \in \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C \otimes \cdots)$ i $R(T) \leq r$ to $T \in \mathrm{Sub}_{r,r,r,\dots}$.*

(ii) $\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots}$ *jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{P}(A \otimes B \otimes C \otimes \cdots)$.*

(iii) $\sigma_r(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C \times \cdots) \subset \mathrm{Sub}_{r,r,r,\dots}$.

(iv) $\mathrm{Sub}_{a,b,c,\dots}$ *jest zbiorem zer $(a+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $A \otimes (B \otimes C \otimes \cdots)$, $(b+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $B \otimes (A \otimes C \otimes \cdots)$, $(c+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $C \otimes (A \otimes B \otimes \cdots)$,...*

I analagiczne ćwiczenie w przypadku symetrycznym:

Ćwiczenie 1.2. *Ustalmy $r, d \in \mathbb{N}$ oraz przestrzeń wektorową A. Pokaż, że:*

(i) *Jeśli $P \in \mathbb{P}(S^dA)$ i $R(P) \leq r$ to $P \in \mathrm{Sub}_r^{sym}$.*

(ii) Sub_r^{sym} *jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{P}(S^dA)$.*

(iii) $\sigma_r(v_d(\mathbb{P}A)) \subset \mathrm{Sub}_r^{sym}$.

(iv) Sub_r^{sym} *jest zbiorem zer $(r+1)$-minorów pochodzących od spłaszczeń $S^dA \hookrightarrow A \otimes (S^{d-1}A)$.*

Dziedziczenie (ang. *inheritance*).

Twierdzenie 1.4. *Niech* $r < \dim A$ *oraz* $b := \dim B$, $c := \dim C$,... *Rozważmy liniowe rzutowania* $\pi\colon A \to \mathbb{C}^r$. *Mamy:*

$$\sigma_r(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C \times \cdots) = \mathrm{Sub}_{r,b,c,\ldots} \cap \bigcap_{\pi} \pi^{-1}(\sigma_r(\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C \times \cdots)).$$

(Wystarczy rozważać rzutowania π *po współrzędnych.)*

Dowód...