Geometria tensorów

Jarosław Buczyński

4 grudnia 2014

1 Odwzorowania

Rozmaitości algebraiczne, które nas będą interesować, to rozmaitości rzutowe oraz $X \setminus Y$, gdzie X i Y są rozmaitościami rzutowymi i $Y \subset X$.

Formalnie nie powiedzieliśmy sobie, co to jest odwzorowanie rozmaitości algebraiczych, rzutowych lub ich otwartych podzbiorów $X \setminus Y$. Ograniczymy się do kilku przykładów. W ogólności, zobacz dowolny podręcznik z geometrii algebraicznej, np. [BB13], [Harr95], [Hart77],...

Przykład 1.1. Jeśli X i Y są rozmaitościami rzutowymi, to produkt $X \times Y$ też jest rozmaitością rzutową:

$$X \times Y \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \subset \mathbb{P}(V \otimes W).$$

Odwzorowania rzutowania $X \times Y \to X$ oraz $X \times Y \to Y$ są odwzorowaniami rozmaitości algebraicznych.

Przykład 1.2. Jeśli A i X są podrozmiatościami rzutowymi ustalonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}W$ oraz $A \subset X$, to włożenie $A \hookrightarrow X$ jest odwzorowaniem rozmaitości algebraicznych.

Przykład 1.3. Jeśli X, Y, Z są rozmaitościami algebraicznymi, a $\phi\colon X \to Y$ i $\psi\colon Y \to Z$ są odwzorowaniami rozmaitości algebraicznych, to ich złożenie $\psi \circ \phi$ jest odwzorowaniem rozmaitości algebraicznych.

Niech $B \subset \mathbb{C}$ będzie małym dyskiem wokół 0. *Mały* oznacza, że w razie potrzeby go zmniejszamy i się nie przejmujemy. (Uwaga! B nie jest rozmaitością algebraiczną!) *Wektor styczny* do X w x, to odwzorowanie z B (parametryzowanego przez zmienną t) w małe otoczenie U punktu x w X, z dokładnością do równoważności:

$$\phi \sim \psi \Leftrightarrow \phi \text{ i } \psi \text{ mają te same wektory styczne w 0: } \frac{\partial \phi}{\partial t}(0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(0).$$

Korzystamy tu z tego, że U jest izomorficzne z podzbiorem otwartym w $\mathbb{C}^{\dim X}$.

Mówiliśmy już o rzutowej i afinicznej przestrzeni stycznej. Dla rozmaitości algebraicznej X i punktu gładkiego $x \in X$, *abstrakcyjna przestrzeń styczna* $T_x X$ (lub po prostu *przestrzeń styczna*), to przestrzeń wektorowa wymiaru $\dim X$, której elementami są wektory styczne.

Ćwiczenie 1.1. *Pokaż, że* $T_p \mathbb{P}W = W/p \otimes (p)^*$, *gdzie* $p \in \mathbb{P}W$ *jest jednocześnie* $p \simeq \mathbb{C} \subset W$.

Ćwiczenie 1.2. *Pokaż, że dla* $X \subset \mathbb{P}W$ *i* $x \in X$ *mamy* $T_x X = \hat{T}_x X / x \otimes x^*$.

Ćwiczenie 1.3. *Pokaż, że dla* $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times C) \subset \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C)$, *mamy*

$$\mathbb{P}T_{[a\otimes b\otimes c]} X = \mathbb{P}(a \otimes b \otimes C + a \otimes B \otimes c + A \otimes b \otimes c)$$

i analogicznie dla innej liczby składników.

Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem rozmaitości algebraicznych oraz $x \in X$ jest gładkim punktem takim, że $f(x) \in Y_0$ (to znaczy, $f(x)$ jest gładkim punktem Y), to mamy odwzorowanie różniczki f w punkcie x:

$$D_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y.$$

To odwzorowanie wyznaczone jest przez składanie $f \circ \phi$ z krzywymi $\phi\colon B \to X$.

Stwierdzenie 1.4. *Odwzorowanie (algebraiczne) rozmaitości algebraicznych* $\psi\colon X \to Y$ *jest* generycznie submersją *na swój obraz. Dokładniej, niech* $Z \subset Y$ *będzie domknięciem obrazu* ψ. *Wtedy istnieje otwarty gęsty podzbiór* $U \subset X_0$*, taki, że dla każdego* $x \in U$ *mamy* $\psi(x) \in Z_0$ *(czyli* $\psi(x)$ *jest gładkim punktem* Z*), oraz* $\hat{T}_{\psi(x)} Z = \mathrm{D}_x \psi(\hat{T}_x X)$.

Anty-Przykład 1.5 (Obmotka torusa, wersja rzeczywista)**.** *Mając torus* $S^1 \times S^1$, *rozważmy odwzorowanie* $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ *zadane wzorem* $t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, *dla* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Domknięcie obrazu tego odwzorowania (niealgebraicznego!!) jest całym torusem* $S^1 \times S^1$, *podczas, gdy jego różniczka* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *nie jest "na" w żadnym punkcie.*

Anty-Przykład 1.6 (Obmotka torusa, wersja holomorficzna)**.** *Rozważmy odwzorowanie* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ *zadane wzorem* $t \mapsto (e^t, e^{\alpha t})$, *dla* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Analogicznie, domknięcie obrazu tego odwzorowania niealgebraicznego jest całym* $\mathbb{C}^2$, *a jego różniczka nie jest "na".*

Treścią Stwierdzenia 1.4 jest to, że sytuacje analogiczne do Anty-Przykładów nie mogą mieć miejsca dla odwzorowań algebraicznych. Co więcej, na przykład wymiar $f(X)$ jest równy randze różniczki w ogólnym punkcie $x \in X$.

Stwierdzenie 1.7 (Lemat Terracini'ego)**.** *Istnieje otwarty gęsty podzbiór U rozmaitości siecznych $\sigma_r(X)$, taki, że dla każdego $p \in U$, i otwartego gęstego podzbioru przedstwień $p \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$*

$$\mathbb{P}T_p\sigma_r(X) = \langle \mathbb{P}T_{x_1}, \ldots, \mathbb{P}T_{x_r} \rangle.$$

Dowód...

Wniosek 1.8. $\dim \sigma_r(X) = \dim\langle \mathbb{P}T_{x_1}, \ldots, \mathbb{P}T_{x_r} \rangle$ *dla pewnych ogólnych punktów $x_1, \ldots, x_r$.*

Wniosek 1.9. *Dla $X \subset \mathbb{P}W$ takiego, że $\langle X \rangle = \mathbb{P}W$, mamy*

$$\dim \sigma_r(X) \leq \min \{r \dim X + r - 1, \dim \mathbb{P}W\}$$

dla pewnych ogólnych punktów $x_1, \ldots, x_r$.

Definicja wymiar spodziewany, defekt...

Ćwiczenie 1.4. *Policz* $\dim \sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1}))$.

Ćwiczenie 1.5. *Policz* $\dim \sigma_2(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{l-1}))$.

Ćwiczenie 1.6. *Policz* $\dim \sigma_r(v_2(\mathbb{P}^{n-1}))$.

Ćwiczenie 1.7. *Policz* $\dim \sigma_2(v_d(\mathbb{P}^{n-1}))$.

Literatura

[BB13] Andrzej Białynicki-Birula. *Wykłady z geometrii algebraicznej.* Księgozbiór Matematyczny, tom 1. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 2013.

[Harr95] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[Hart77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.