Geometria tensorów

Jarosław Buczyński

26 listopada 2014

1 Rozmaitości siecznych i ranga brzegowa

Ustalmy domknięty zbiór $\hat{X} \subset W$, niezmienniczy ze względu na przeskalowania. Dodatkowo, zakładamy $\hat{X}$, że jest rozmaitością afiniczną, czyli zbiorem domkniętym w W, który można opisać równaniami wielomianowymi.

Z tych dwóch założeń wynika, że $\hat{X}$ jest stożkiem afiniczym rzutowej rozmaitości $X \subset \mathbb{P}W$, z którą jest znacznie wygodniej pracować, gdyż ma własności zwartej przestrzeni topologicznej. To znaczy,

$$X = (\hat{X} \setminus 0)/\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}W = (W \setminus 0)/\mathbb{C}^*.$$

Od tej pory będziemy rozważać rozmaitość rzutową $X \subset \mathbb{P}W$, a odpowiadające obiekty (liniowe/afiniczne) w W będą oznaczane daszkiem $\hat{}$, a notacja i sformułowania twierdzeń będą głównie w wersji rzutowej. Dla uproszczenia można mieć na uwadze przykłady Veronese i Segre, tzn.:

(i) rozmaitość Veronese

$$v_d(\mathbb{P}V) \subset \mathbb{P}(S^d V), \quad v_d(\mathbb{P}V) = \left\{ [l^d] : l \in V \right\}, \text{ oraz}$$

(ii) rozmaitość Segre

$$\begin{aligned} \mathrm{Seg} &= \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C) \subset \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C), \\ \mathrm{Seg} &= \{ [a \otimes b \otimes c] : a \in A, b \in B, c \in C \}, \end{aligned}$$

ewentualnie z inną liczbą czynników.

Możemy zastosować definicję X-rangi również do $p \in \mathbb{P}W$, a więc $r_X(p)$ jest minimalną liczbą całkowitą r, taką, że $p \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ dla pewnych $x_i \in X$. Tu $\langle R \rangle$ oznacza rozpięcie rzutowej przestrzeni liniowej, czyli najmniejszej podprzestrzeni $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}W$ zawierającej R.

Definiujemy r-tą *rozmaitość siecznych* rozmaitości X jako domknięcie sumy wszystkich podprzestrzeni linowych rozpiętych przez r punktów z X:

$$\sigma_r(X) := \overline{\bigcup\{\langle x_1, \ldots, x_r\rangle : x_i \in X\}} \subset \mathbb{P}W.$$

Rozmaitość siecznych jest więc domknięciem zbioru punktów rangi co najwyżej r. W szczególności proste styczne do X są granicami prostych siecznych, zatem punkty zanurzonej przestrzeni stycznej do X w gładkim punkcie zawierają się w $\sigma_2(X)$, jednak zwykle punkty tamże mają rangę wyższą niż 2.

Wobec tego stratyfikacja W przez rangę może być bardzo skomplikowana. Jest to motywacją dla przyjęcia następującej definicji. Niech $p \in \mathbb{P}W$ (lub $p \in W$). Definiujemy $\underline{\mathbf{r}}_X(p)$ jako *X-rangę brzegową* punktu p, czyli minimalną liczbę naturalna r, taką, że $p \in \sigma_r(X)$ (lub $[p] \in \sigma_r(X)$, gdzie $[p] \in \mathbb{P}W$ jest klasą $p \in W$ w przestrzeni rzutowej; przyjmujemy, że $\underline{\mathbf{r}}_X(p) = r_X(p) = 0$, gdy $p = 0$). Innymi słowy, X-ranga brzegowa punktu p to najmniejsza liczba natularna r taka, że p przybliża się przez kombinacje liniowe r punktów z X. Zawsze $\underline{\mathbf{r}}_X(p) \leq r_X(p)$. W wielu zastosowaniach wystarczający jest przybliżony wynik, więc X-ranga brzegowa jest interesującą i ważną wielkością. Jako przykład wróćmy do mnożenia macierzy: dobre ograniczenie na X-rangę brzegową może posłużyć do szybkiego pomnożenia macierzy z dowolnie zadaną dokładnością. Dlatego ważne jest badać kryteria, które pozwolą szacować rangę brzegową.

Kluczowy (elementarny) przykład:

Przykład 1.1. Jeśli $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B)$, to zbiór tensorów X-rangi co najwyżej r jest domknięty, więc X-ranga jest równa X-randze brzegowej.

Ogólnie ranga i ranga brzegowa rzadko są sobie równe na całej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}W$.

Ważne problemy:

Problem 1.2. Ustalmy $X \subset \mathbb{P}W$.

- Jaki jest *wymiar* r-tej rozmaitości siecznych? W szczególności, jakie jest najmniejsze r, takie, że $\sigma_r(X) = \mathbb{P}W$?
- Jakie są *równania* opisujące $\sigma_r(X) \subset \mathbb{P}W$?
- Dla $p \in \sigma_r(X)$, jaka może być jego ranga?

Są to często trudne pytania, ale w szczególnych sytuacjach można coś konkretnego powiedzieć. Na razie wyjaśnimy, co te pytania oznaczają.

2 Geometria algebraiczna

Uwaga 2.1. Aby twierdzenia geometrii algebraicznej powiązane z rozmaitościami siecznych miały ręce i nogi, potrzeba założyć, że ciało bazowe jest algebraicznie domknięte. Jak nie (na przykład nad $\mathbb{R}$), to z punktu widzenia tej tematyki więcej sensu ma mówienie o rozmaitościach semi-algebraicznych, czyli takich, które są opisane przez równania wielomianowe i nierówności wielomianowe, np. koło $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$ w przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^2$. Jednakże, tym tematem nie będziemy się tutaj zajmować.

Ustalmy $\mathbb{P}W$ przestrzeń rzutową. Pierścień współrzędnych jednorodnych $\mathbb{P}W$ to pierścień wielomianów T w $\dim W$ zmiennych. Zmienne interpretujemy jako funkcje liniowe na W, więc $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i W^*$. Jeśli $f \in S$ to f jest funkcją (wielomianową) $W \to \mathbb{C}$, ale nie wyznacza funkcji $\mathbb{P}W \to \mathbb{C}$. Jeśli $f \in S$ jest jednorodne, tzn $f \in S^i W^*$, to mamy dobrze określony zbiór zer f, jako podzbiór w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}W$. Dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{P}W$ możemy rozpatrywać

$$I(X) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left\{ f \in S^i W^* : f|_X = 0 \right\}.$$

Jest to jednorodny ideał w pierścieniu wielomianów S. Z drugiej strony, dla dowolnego ideału jednorodnego $I \subset S$, możemy rozpatrywać zbiór zer I:

$$Z(I) = \left\{ x \in \mathbb{P}W : \forall i \forall f \in I_i \subset S^i W, \quad f(x) = 0 \right\}.$$

Może się zdażyć, że $Z(I)$ jest *przywiedlne*, to znaczy jest sumą dwóch domkniętych podzbiorów postaci $Z(I) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$ (w nietrywialny sposób, to znaczy $Z(I_1) \neq Z(I)$ oraz $Z(I_2) \neq Z(I)$). Każdy zbiór $Z(I)$ można rozłożyć na sumę podzbiorów *nieprzywiedlnych* (czyli takich, które nie mają nietrywialnego rozkładu $Z(I) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$).

Rozmaitość rzutowa, to nieprzywiedlny zbiór $X = Z(I)$ dla pewnego ideału $I \subset S$. Przez równania rozmaitości X rozumiemy generatory ideału I, takiego, że $Z(I) = X$. (Są to tak zwane *teorio-zbiorowe równania* X, można też rozważać *ideałowe równania*, czyli po prostu generatory $I(X)$.)

Uwaga na boku (na przyszłość): Jeśli X jest rozmaitością, to $I(X)$ jest ideałem pierwszym.

Jeśli $W' \subset W$ jest podprzestrzenią liniową, to mamy naturalnie $\mathbb{P}W' \subset \mathbb{P}W$. Jest to podrozmaitość i $I(\mathbb{P}W')$ jest generowane przez funkcje liniowe, te same, które definiują $W' \subset W$ jako podprzestrzeń liniową. $\mathbb{P}W'$ nazywamy liniową podprzestrzenią rzutową, lub po prostu po podprzestrzenią liniową.

Stwierdzenie 2.2. *Każda rozmaitość rzutowa X ma otwarty gęsty podzbiór punktów gładkich. To znaczy, istnieje otwarty gęsty podzbiór $X_0 \subset X$ taki, że X_0 jest* rozmaitością różniczkową, *a dokładniej* rozmaitością holomorficzną.

Definicja 2.3. *Wymiar X oznaczamy przez $\dim X$ i jest to zespolony wymiar X_0.*

Uwaga 2.4. X_0 jest spójne, gdyż X jest nieprzywiedlne i rozpatrujemy rozmaitości zespolone. Dlatego taka definicja jak wyżej ma sens i jest dobrze określona. Nad dowolnym ciałem wymiar można zdefiniować algebraicznie, i potem udowodnić, coś podobnego do podanej definicji.

Dla $\hat{p} \in W$, odpowiadającego mu $p \in \mathbb{P}W$, oraz jednorodnego wielomianu $f \in S$ możemy rozpatrywać $D_{\hat{p}}f \in W^* = S^1W^* \subset S$ różniczkę f w punkcie p. Jeśli $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (gdzie $n = \dim X$), to

$$\mathrm{D}_{\hat{p}}f = \frac{\partial f}{\partial x_0}(\hat{p}) \cdot x_0 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{p}) \cdot x_n.$$

Dla ustalonego $\hat{p}$ jest to funkcja liniowa na W. Ponadto, jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $\deg f = i > 0$ (f jest jednorodne!), to $\mathrm{D}_{\lambda\hat{p}}f = \lambda^{i-1}\mathrm{D}_{\hat{p}}f$. W szczególności, $Z(\mathrm{D}_{\hat{p}}f)$ zależy tylko od klasy $[\hat{p}] = p \in \mathbb{P}W$. Jeśli dla uproszczenia oznaczamy $Z(\mathrm{D}_p f)$.

Definicja 2.5. Przestrzenie styczne. *Niech $I(X) \subset S$ będzie ideałem rozmaitości $X \subset \mathbb{P}(W)$. Wybierzmy $x \in X_0$.*

- Afiniczna przestrzeń styczna *to liniowa podprzestrzeń $\hat{T}_xX \subset W$, zdefiniowana przez znikanie funkcji liniowych $Z(D_xf : f \in I(X))$.*
- Rzutowa przestrzeń styczna *to liniowa podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}T_xX \subset \mathbb{P}W$, zdefiniowana przez znikanie tych samych funkcji liniowych $Z(D_xf : f \in I(X))$.*

Pierwsze własności:

(i) $\mathbb{P}(\hat{T}_xX) = \mathbb{P}T_xX$.

(ii) Dla $x \in X_0$, mamy $\dim X = \dim \mathbb{P}T_xX = \dim \hat{T}_xX - 1$.