Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Barbara Mroczek
Nr albumu: 345354

Uogólnienia zespolonych rozmaitości kontaktowych

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Jarosław Buczyński
Instytut Matematyki

Grudzień 2018

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy wprowadzono pojęcie rozmaitości generycznie kontaktowej poprzez uogólnienie definicji zespolonej rozmaitości kontaktowej. Osłabienie definicji polega na dopuszczeniu zdegenerowania pochodnej formy kontaktowej na zbiorze brzegowym. Pokazano, że każda struktura generycznie kontaktowa na przestrzeni rzutowej jest kontaktowa. Podano warunki wystarczające, by struktura generycznie kontaktowa na urzutowieniu wiązki liniowej była kontaktowa. Zbadano lokalną postać i lokalne niezmienniki 3-wymiarowej rozmaitości generycznie kontaktowej.

Słowa kluczowe

zespolona rozmaitość kontaktowa

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

53 Differential geometry
53D Symplectic geometry, contact geometry
53D10 Contact manifolds, general

Spis treści

Wprowadzenie

Gładką rozmaitość X nazywamy kontaktową, jeśli istnieje podwiązka F kowymiaru 1 wiązki stycznej TX, taka że przekształcenie $\mathrm{d}\theta : F \otimes F \to TX/F$ wyznaczone przez pochodną przekształcenia ilorazowego $TX \to TX/F$ jest niezdegenerowane.

Rzeczywiste rozmaitości kontaktowe znane były już w XIX wieku, z zastosowaniami w mechanice, optyce i termodynamice ([5]). Zespolone rozmaitości kontaktowe są związane z konstrukcją przykładu zwartej rozmaitości kwaternionowo-Kählerowskiej ([9]). Znane są dwie rodziny przykładów rzutowych zespolonych rozmaitości kontaktowych: urzutowienie wiązki kostycznej rozmaitości projektywnych (patrz przykład 3.1) oraz pewne przestrzenie jednorodne ([2]).

Celem niniejszej pracy jest zbadanie osłabienia definicji zespolonej rozmaitości kontaktowej poprzez dopuszczenie degeneracji przekształcenia $\mathrm{d}\theta$ na zbiorze brzegowym. Uzyskane w ten sposób przykłady rozmaitości generycznie kontaktowych mogą pomóc w zrozumieniu sztywności zespolonych struktur kontaktowych i w ich klasyfikacji.

Pojęcie rozmaitości generycznie kontaktowej pojawiło się wcześniej jedynie w pracy [3], gdzie zauważono, że część własności krzywych wymiernych na rozmaitościach kontaktowych zachodzi także dla analogicznych krzywych na rozmaitościach generycznie kontaktowych, np. [3], twierdzenie 1.5.

W pracy znajduje się przykład niekontaktowej struktury generycznie kontaktowej na zwartej rozmaitości rzutowej (przykład 1.10). Okazuje się, że na przestrzeni rzutowej każda struktura generycznie kontaktowa jest kontaktowa (twierdzenie 2.5). Znaleźliśmy warunki wystarczające na to, by struktura generycznie kontaktowa na urzutowieniu wiązki była kontaktowa (stwierdzenie 3.5). Wskazaliśmy uproszczoną, choć niejednoznaczną, lokalną postać formy generycznie kontaktowej na rozmaitości wymiaru 3 (stwierdzenie 4.1) oraz niezmienniki tej lokalnej postaci (podrozdział 4.1).

Wszystkie twierdzenia dotyczące rozmaitości generycznie kontaktowych przedstawione w tej pracy są jej oryginalnym wynikiem, choć niektóre, jak na przykład stwierdzenie 1.6, są natychmiastowym uogólnieniem uwag o zwykłych rozmaitościach kontaktowych.

Znalezienie przykładów struktury generycznie kontaktowej okazało się zaskakująco trudne. Naturalne wydaje się pytanie o rozstrzygnięcie, kiedy biwymierna modyfikacja rozmaitości kontaktowej prowadzi do uzyskania rozmaitości generycznie kontaktowej. Warto znaleźć też osłabienie warunków dla struktury generycznie kontaktowej na urzutowieniu wiązki, by była strukturą kontaktową. Nierozwiązany pozostaje także problem lokalnej klasyfikacji rozmaitości generycznie kontaktowych, zwłaszcza w wyższych wymiarach.

Rozdział 1

Definicja rozmaitości kontaktowej i generycznie kontaktowej

1.1. Definicje

Rozpatrzmy ciąg dokładny zespolonych wiązek wektorowych nad gładką zespoloną rozmaitością algebraiczną (lub holomorficzną) X wymiaru $2n+1$:

$$0 \to F \to TX \xrightarrow{\theta} L \to 0,$$

gdzie TX jest wiązką styczną, a F podwiązką wiązki stycznej kowymiaru 1. Lokalnie istnieją współrzędne $y_1, \ldots, y_{2n+1}$ oraz wielomiany (lub funkcje holomorficzne) $A_1(y_1, \ldots, y_{2n+1}), \ldots, A_{2n+1}(y_1, \ldots, y_{2n+1})$, takie że z dokładnością do niejednoznacznej trywializacji liniowej wiązki L, odwzorowanie θ jest 1-formą holomorficzną

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n+1} A_i \mathrm{d}y_i,$$

$$F = \{v \in TX : \sum_{i=1}^{2n+1} A_i \mathrm{d}y_i(v) = 0\},$$

$$\mathrm{d}\theta = \sum_{i=1}^{2n+1} \mathrm{d}A_i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Po zmianie trywializacji wiązki L, czyli wyborze $g : L \to GL(1) \approx \mathbb{C}^*$ otrzymujemy w nowych współrzędnych

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n+1} B_i \mathrm{d}y_i = g \cdot \sum_{i=1}^{2n+1} A_i \mathrm{d}y_i,$$

$$\mathrm{d}\theta = \sum_{i=1}^{2n+1} \mathrm{d}B_i \wedge \mathrm{d}y_i = \sum_{i=1}^{2n+1} \mathrm{d}(g \cdot A_i) \wedge \mathrm{d}y_i = \mathrm{d}g \cdot \sum_{i=1}^{2n+1} A_i \wedge \mathrm{d}y_i + g \cdot \sum_{i=1}^{2n+1} \mathrm{d}A_i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Na F zachodzi $\sum A_i \mathrm{d}y_i = 0$, czyli w nowych współrzędnych

$$\mathrm{d}\theta = g \cdot \sum_{i=1}^{2n+1} \mathrm{d}A_i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Zatem $\mathrm{d}\theta$ zadaje przekształcenie wiązek $\mathrm{d}\theta|_F : \Lambda^2 F \to L$.

Definicja 1.1. Rozmaitość X wraz z podwiązką F wiązki stycznej kowymiaru 1 jest *kontaktowa*, jeśli $\mathrm{d}\theta|_F$ jest nigdzie niezdegenowaną formą dwuliniową na wiązce F.

Osłabienie definicji rozmaitości kontaktowej prowadzi do pojęcia badanego w niniejszej pracy:

Definicja 1.2. Rozmaitość X wraz z podwiązką F wiązki stycznej kowymiaru 1 jest *generycznie kontaktowa*, jeśli $\mathrm{d}\theta|_F$ jest niezdegenowaną formą dwuliniową na wiązce F obciętej do pewnego otwartego zbioru gęstego w X.

1.2. Podstawowe własności

Lemat 1.3. *Dla ciągu dokładnego wiązek wektorowych* $0 \to U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} W \to 0$ *zachodzi*

$$\bigwedge^{\dim V} V = \bigwedge^{\dim U} U \otimes \bigwedge^{\dim W} W.$$

Dowód. Niech $k = \dim U$, $m = \dim W$. Niech $\psi : \bigwedge^k U \otimes \bigwedge^m W \to \bigwedge^{k+m} V$ będzie przekształceniem wiązek wektorowych, zadanym przez

$$\psi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \otimes w_1 \wedge \ldots \wedge w_m) = \iota(u_1) \wedge \ldots \wedge \iota(u_k) \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_m,$$

gdzie $v_i \in V$ takie, że $\pi(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \ldots, m$. Sprawdźmy, że przekształcenie ψ jest dobrze określone.

Niech $i \in \{1, \ldots, m\}$ oraz $v_i, v_i' \in V$, takie że $\pi(v_i) = \pi(v_i') = w_i$. Wtedy $v_i - v_i' \in \ker \pi = \operatorname{Im} \iota$, czyli $v_i - v_i' = \iota(u)$ dla pewnego $u \in U$. Wówczas $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge u \in \bigwedge^{k+1} U = 0$, czyli $\iota(u_1) \wedge \ldots \wedge \iota(u_k) \wedge (v_i - v_i') = 0$. Zatem wartość funkcji ψ nie zależy od wyboru przeciwobrazu w_i.

Przekształcenie ψ na każdym włóknie jest niezerowym przekształceniem między 1-wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi, czyli ψ jest izomorfizmem wiązek wektorowych $\bigwedge^k U \otimes \bigwedge^m W$ oraz $\bigwedge^{k+m} V$. $\square$

Stwierdzenie 1.4. *Niech $x \in X$. Wówczas forma $\mathrm{d}\theta|_F$ jest niezdegenerowaną formą dwuliniową na wiązce F w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy forma $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta$ na wiązce TX jest niezerowa w punkcie x.*

Dowód. Lemat 1.3 pozwala utożsamić $\bigwedge^{2n+1} TX$ z $\bigwedge^{2n} F \otimes L$. Dla dowolnych $f_1, \ldots, f_{2n} \in F_x = \ker \theta_x$, $l \in L_x$, $v \in \theta^{-1}(l)$ zachodzi

$$\big((\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta\big)(f_1 \wedge \ldots \wedge f_{2n} \otimes l) = (\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}(f_1, \ldots, f_{2n}) \cdot \theta(v) - (\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}(f_1, \ldots, f_{2n-1}, v) \cdot \theta(f_{2n}) + \\ + \ldots + (\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}(v, f_2 \ldots, f_{2n}) \cdot \theta(f_1) = (\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}(f_1, \ldots, f_{2n}) \cdot \theta(v).$$

Ponieważ forma θ jest w dowolnym punkcie niezerowa, więc w punkcie x forma $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta$ jest zerowa wtedy i tylko wtedy, gdy zerowa jest forma $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}|_F$, czyli gdy forma $\mathrm{d}\theta|_F$ jest zdegenerowana. $\square$

Stwierdzenie 1.4 pozwala na następujące przeformułowanie definicji rozmaitości kontaktowej oraz generycznie kontaktowej.

Uwaga 1.5. *Niech K_X oznacza dywizor kanoniczny rozmaitości X. Wówczas rozmaitość X z podwiązką F wiązki stycznej kowymiaru 1 jest kontaktowa, jeśli $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta$ jest nigdzie nieznikającym przekrojem wiązki $\mathcal{O}(K_X) \otimes L^{\otimes(n+1)}$ oraz genercznie kontaktowa, gdy przekrój ten jest niezerowy na otwartym, gęstym podzbiorze X.*

Miejsca zerowe tego przekroju wyznaczają dywizor na rozmaitości X. Dywizor ten jest pusty wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość jest kontaktowa.

Stwierdzenie 1.6. *Niech B oznacza dywizor zerowania się przekroju $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta$ struktury generycznie kontaktowej $0 \to F \to TX \to L \to 0$ na $(2n+1)$-wymiarowej rozmaitości X. Wówczas*

$$\mathcal{O}(-K_X) = L^{\otimes(n+1)} \otimes \mathcal{O}(-B).$$

Dowód. Na mocy lematu 1.3, $\bigwedge^{2n+1} TX = \bigwedge^{2n} F \otimes L$. Jednocześnie $(\mathrm{d}\theta|_F)^{\wedge n} : \bigwedge^{2n} F \to L^{\otimes n}$ zadaje izomorfizm $\bigwedge^{2n} F = L^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(-B)$. Zatem

$$\mathcal{O}(-K_X) = \bigwedge^{2n+1} TX = \bigwedge^{2n} F \otimes L = L^{\otimes(n+1)} \otimes \mathcal{O}(-B).$$

□

1.3. Przykłady

Lemat 1.7 (Ciąg Eulera). *Niech V bedzie przestrzenią wektorową wymiaru $m+1$. Istnieje krótki ciąg dokładny wiązek nad $\mathbb{P}(V)$:*

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}(1)^{m+1} \xrightarrow{\pi} T\mathbb{P}(V) \to 0,$$

gdzie dla $v \in V \setminus \{0\}$, $t \in \mathcal{O}_{[v]}$

$$\iota(t) = t \cdot v \otimes \langle v \rangle^* \in V \otimes \langle v \rangle^* = \left(\mathcal{O}(1)^{m+1}\right)_{[v]},$$

natomiast przekształcenie π pochodzi od odwzorowania stycznego do przekształcenia ilorazowego $V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$.

Dowód. [6], twierdzenie II.8.13. □

Przykład 1.8. Rozpatrzmy $V = \mathbb{C}^{2n+2}$, $X = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{2n+1}$ wraz z niezdegenerowaną formą $\omega \in \Lambda^2 V^*$. Niech $v \in V \setminus \{0\}$, $[v] \in X$, wówczas na mocy lematu 1.7, $T_{[v]}\mathbb{P}(V) = V/\langle v \rangle \otimes \langle v \rangle^*$. Wiązka F zdefiniowana jako $F_{[v]} = \langle v \rangle^{\perp\omega}/\langle v \rangle \otimes \langle v \rangle^* \subset T_{[v]}\mathbb{P}(V)$ zadaje ciąg dokładny wiązek

$$0 \to F \to T\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}(2) \to 0$$

wraz ze strukturą kontaktową na $\mathbb{P}^{2n+1}$ ([2], stwierdzenie E.1).

Przykład 1.9. Zgodnie z sugestią w [3] (komentarz po stwierdzeniu 5.3), biwymierne modyfikacje $\mathbb{P}^3$ powinny tworzyć rzutową rozmaitość generycznie kontaktową. Rozpatrzmy rozdmuchanie X rozmaitości $\mathbb{P}^3$ w punkcie. Dokładniej, niech $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$, rozpatrzmy otoczenie afiniczne $x_4 \neq 0$ rozdmuchiwanego punktu $[0:0:0:1]$, sparametryzowane jako $\{[t_1 : t_2 : t_3 : 1]\}$. Ustalając lokalną trywializację wiązki L, możemy przyjąć

$$\theta = t_1 \mathrm{d}t_2 - t_2 \mathrm{d}t_1 - \mathrm{d}t_3.$$

Przeciągając θ na fragment pokrycia rozdmuchania wzdłuż przekształcenia

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_1 \cdot u_2, u_1 \cdot u_3),$$

otrzymujemy

$$\Phi^*\theta = -u_3 \mathrm{d}u_1 + u_1^2 \mathrm{d}u_2 - u_1 \mathrm{d}u_3.$$

Powyższa forma nie jest epimorfizmem wiązek $TX \to \Phi^* L$ na prostej $u_1 = u_3 = 0$, rozdmuchajmy więc rozmaitość wzdłuż tej krzywej i przeciągnijmy formę ponownie na fragment pokrycia:

$$\Psi(t, u_2, u_3) = (t \cdot u_3, u_2, u_3),$$
$$\Psi^*\Phi^*\theta = -u_3^2 \mathrm{d}t + t^2 u_3^2 \mathrm{d}u_2 - 2tu_3 \mathrm{d}u_3.$$

Otrzymana forma zeruje się na podzbiorze kowymiaru 1, po stenserowaniu $\Psi^*\Phi^*L$ przez $\mathcal{O}(E)$, gdzie E to dywizor zerowy powyższej formy, dostajemy

$$\frac{1}{u_3}\Psi^*\Phi^*\theta = -u_3 \mathrm{d}t + t^2 u_3 \mathrm{d}u_2 - 2t \mathrm{d}u_3.$$

Zdefiniujmy ciąg form postaci

$$\theta_n = -u_3 \mathrm{d}w_n + w_n^2 u_3^{n-1} \mathrm{d}u_2 - n w_n \mathrm{d}u_3.$$

W szczególności, $\theta_2 = \frac{1}{u_3}\Psi^*\Phi^*\theta$. Forma θ_n nie jest epimorfizmem na prostej $w_n = u_3 = 0$. Przeciągnijmy ją wzdłuż rozdmuchania tej krzywej:

$$\Psi(w_{n+1}, u_2, u_3) = (w_{n+1} \cdot u_3, u_2, u_3),$$
$$\Psi^*\theta_n = -u_3^2 \mathrm{d}w_{n+1} + w_{n+1}^2 u_3^{n+1} \mathrm{d}u_2 - (n+1) w_{n+1} u_3 \mathrm{d}u_3.$$

Po stensorowaniu wiązki liniowej $\Psi^* L_n$ przez $\mathcal{O}(E_n)$, gdzie E_n to dywizor zerowy formy $\Psi^*\theta_n$, otrzymujemy formę θ_{n+1}. Zatem rozdmuchiwanie rozmaitości kontaktowej w punkcie nie prowadzi w oczywisty sposób do otrzymania rozmaitości generycznie kontaktowej. Tym niemniej, powyższe rozmaitości zawierają otwarte podzniory, które są przykładami niezwartych rozmaitości generycznie kontaktowych, zobacz przykład 4.3.

Przykład 1.10. Rozpatrzmy rozdmuchanie tej samej struktury kontaktowej z przykładu 1.8 na rozmaitości $\mathbb{P}^3$, pochodzącej od formy antysymetrycznej $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ na przestrzeni liniowej V. Tym razem niech X będzie rozdmuchaniem $\mathbb{P}(V)$ wzdłuż podrozmaitości $Y = \{x_1 = x_2 = 0\}$. Sparametryzujmy otoczenie afiniczne $x_3 \neq 0$ punktu $[0:0:1:0]$ jako $\{[t_1 : t_2 : 1 : t_4]\}$. Na nim, po odpowiednim ustaleniu lokalnej trywializacji wiązki L, możemy przyjąć

$$\theta = t_1 \mathrm{d}t_2 - t_2 \mathrm{d}t_1 + \mathrm{d}t_4.$$

Przeciągając formę θ na element U pokrycia afinicznego rozmaitości X wzdłuż przekształcenia

$$\Phi(u_1, u_2, u_4) = (u_1, u_1 \cdot u_2, u_4),$$

otrzymujemy

$$\Phi^*\theta = u_1 \mathrm{d}(u_1 u_2) - u_1 u_2 \mathrm{d}u_1 + \mathrm{d}u_4 = u_1^2 \mathrm{d}u_2 + \mathrm{d}u_4,$$
$$\mathrm{d}\Phi^*\theta = 2u_1 \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2,$$
$$\mathrm{d}\Phi^*\theta \wedge \Phi^*\theta = 2u_1 \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2 \wedge \mathrm{d}u_4.$$

Grupa symplektyczna $\mathrm{Sp}(V)$ przekształceń liniowych przestrzeni V, zachowujących formę antysymetryczną ω, działa także na rozmaitości $\mathbb{P}(V)$, zachowując formę θ. Niech $G \subset \mathrm{Sp}(V)$ oznacza podgrupę przekształceń zachowujących podrozmaitość Y. Grupa G działa przechodnio na podrozmaitości Y, działanie to podnosi się na rozmaitość X. Obraz otoczenia $G \cdot U$ zawiera otoczenie przeciwobrazu punktu $[0:0:1:0] \in Y$. Zatem forma $\Phi^*\theta$ jest generycznie kontaktowa na rozmaitości X, dywizor zdegenerowania struktury generycznie kontaktowej to dywizor wyjątkowy rozdmuchania.

W przykładzie 1.10 rozmaitość kontaktową rozdmuchaliśmy wzdłuż podrozmaitości Y, na której wiązka F po obcięciu do wiązki stycznej TY wyznacza strukturę kontaktową na rozmaitości Y. Przykład ten sugeruje, że rozdmuchanie rozmaitości kontaktowej wzdłuż podrozmaitości kontaktowej przyjmuje strukturę generycznie kontaktową.

Rozdział 2

Struktura rozmaitości generycznie kontaktowej na przestrzeni rzutowej

W tym rozdziale chcemy sklasyfikować struktury generycznie kontaktowe dla $X = \mathbb{P}^{2n+1}$, to znaczy rozmaitość, nad którą szukamy wiązki $F \subset TX$, jest przestrzenią rzutową. Okazuje się (twierdzenie 2.5), że jedyna możliwość to standardowa struktura kontaktowa (przykład 1.8).

Potrzebujemy klasycznego stwierdzenia, które mówi, że jeśli k wielomianów jednorodnych ma jednopunktowy zbiór wspólnych zer, to stanowią one ciąg regularny (lemat 2.4). Przypomnijmy niezbędne definicje z algebry przemiennej ([4], początki rozdziałów 17 i 18).

Definicja 2.1. Niech M będzie modułem nad pierścieniem R. Wówczas elementy $x_1, \ldots, x_n \in R$ stanowią *M-ciąg regularny*, jeśli

1. $(x_1, \ldots, x_n)M \neq M$
2. Dla $i = 1, \ldots, n$, x_i nie jest dzielnikiem zera w $M \big/ (x_1, \ldots, x_{i-1})M$.

Definicja 2.2. Głębokość ideału I pierścienia R to długość (dowolnego) maksymalnego R-ciągu regularnego o wyrazach z I.

Definicja 2.3. Pierścień R jest *pierścieniem Cohena-Macaulaya*, jeśli każdy jego ideał maksymalny ma głębokość równą jego kowymiarowi.

Lemat 2.4. *Jeśli wielomiany jednorodne $s_1, \ldots, s_k \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$ mają zbiór wspólnych zer $Z(s_1, \ldots, s_k) = \{(0, \ldots, 0)\}$, to stanowią R^k-ciąg regularny.*

Dowód. Niech $M = R^k$. Dla dowolnego ideału I pierścienia R zachodzi $M/_{I \cdot M} = \left(R/_I\right)^k$. W szczególności,

$$M \big/ (s_1, \ldots, s_k)M = \left(R \big/ (s_1, \ldots, s_k)\right)^k \neq 0,$$

czyli $(s_1, \ldots, s_k)M \neq M$. Pozostaje udowodnić, że s_i nie jest dzielnikiem zera w $M \big/ (s_1, \ldots, s_{i-1})M = \left(R \big/ (s_1, \ldots, s_{i-1})\right)^k$. Wystarczy, że s_i nie jest dzielnikiem zera w $R \big/ (s_1, \ldots, s_{i-1})$.

W przestrzeni rzutowej rozmaitość o dodatnim wymiarze przecina się z dowolną hiperpowierzchnią niepusto, a każda składowa przecięcia ma wymiar mniejszy o co najwyżej 1 ([6], twierdzenie 7.2). Stąd różnica w wymiarze Krulla pierścieni $R \big/ (s_1, \ldots, s_{j-1})$ oraz

$R\Big/(s_1,\ldots,s_j)$ wynosi co najwyżej 1, ale $\dim R - \dim\left(R\Big/(s_1,\ldots,s_k)\right) = k - 0 = k$, czyli wymiar przy każdym kolejnym dzieleniu spada oraz $\dim R\Big/(s_1,\ldots,s_j) = k - j$.

Pierścień $R = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_k]$ jest pierścieniem Cohena-Macaulaya oraz $\operatorname{codim}(s_1,\ldots,s_{i-1}) = i-1$, więc w rozkładzie prymarnym ideału $(s_1,\ldots,s_{i-1}) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_l$ każdy stowarzyszony ideał pierwszy $\sqrt{Q_j}$ jest minimalny oraz ma kowymiar $i-1$ ([4], wniosek 18.14).

Gdyby s_i było dzielnikiem zera w $R\Big/(s_1,\ldots,s_{i-1})$, to istniałoby $r \in R$, takie że $s_i, r \notin (s_1,\ldots,s_{i-1})$, ale $s_i \cdot r \in (s_1,\ldots,s_{i-1})$. Ponieważ $\operatorname{codim}(s_1,\ldots,s_i) = i$, więc s_i nie należy do żadnego z $\sqrt{Q_j}$. Jednak wtedy dla każdego j, $s_i \notin \sqrt{Q_j}$, $s_i \cdot r \in Q_j$, czyli $r \in Q_j$. Stąd $r \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_l = (s_1,\ldots,s_i)$, sprzeczność. Zatem s_i nie jest dzielnikiem zera w $R\Big/(s_1,\ldots,s_j)$.

□

Twierdzenie 2.5. *Na przestrzeni rzutowej każda struktura rozmaitości generycznie kontaktowej jest kontaktowa.*

Dowód. Ustalmy na $\mathbb{P}^{2n+1}$ nigdzie zerową skręconą formę $\theta : T\mathbb{P}^{2n+1} \to L$. Jednowymiarowa wiązka liniowa L nad przestrzenią rzutową jest izomorficzna z $\mathcal{O}(d+1)$ dla pewnego d. Wówczas

$$\theta \in \operatorname{Hom}(T\mathbb{P}^{2n+1}, L) = \operatorname{Hom}(T\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}(d+1)) = H^0(\Omega\mathbb{P}^{2n+1}(d+1)).$$

Zdualizowany i skręcony ciąg Eulera (lemat 1.7)

$$0 \to \Omega\mathbb{P}^{2n+1}(d+1) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}(d)^{2n+2} \xrightarrow{\iota^*} \mathcal{O}(d+1) \to 0$$

indukuje długi ciąg dokładny grup kohomologii:

$$0 \to H^0(\Omega\mathbb{P}^{2n+1}(d+1)) \xrightarrow{H^0(\pi^*)} H^0(\mathcal{O}(d)^{2n+2}) \xrightarrow{H^0(\iota^*)} H^0(\mathcal{O}(d+1)) \to \ldots,$$

gdzie

$$\left(H^0(\iota^*)\right)(s_0,\ldots,s_{2n+1})_{[x_0:\ldots:x_{2n+1}]} = s_0x_0 + \ldots + s_{2n+1}x_{2n+1},$$

a przekształcenie $H^0(\pi^*)$ pochodzi od odwzorowania stycznego do przekształcenia ilorazowego $\mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{2n+1}$. Formę θ możemy więc utożsamić z formą na rozmaitości $\mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\}$ o postaci $\left(H^0(\pi^*)\right)(\theta) = \sum_{i=0}^{2n+1} s_i \mathrm{d}x_i$, gdzie $s_0,\ldots,s_{2n+1} \in R = \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_{2n+1}]$ to wielomiany jednorodne stopnia d, spełniające równość $\sum_{i=0}^{2n+1} s_i x_i = 0$. Skręcona forma θ jest nigdzie zerowa, więc zbiór wspólnych zer wielomianów $s_0,\ldots,s_{2n+1}$ na płaszczyźnie afinicznej to $Z(s_0,\ldots,s_{2n+1}) = \{0\}$.

Jeśli $d = 0$, to forma $\left(H^0(\pi^*)\right)(\theta)$ jest stała. Przekształcenie $H^0(\pi^*)$ pochodzi od przekształcenia rozmaitości, więc jest przemienne z różniczkowaniem form. Z długiego ciągu dokładnego jest także włożeniem. Zatem $\mathrm{d}\theta = 0$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem o niezerowości przekroju $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta$ formy generycznie kontaktowej.

Jeśli $d = 1$, to $[s_0,\ldots,s_{2n+1}] = [x_0,\ldots,x_{2n+1}] \cdot M$ dla pewnej macierzy $M \in \operatorname{Mat}_{2n+1}^{2n+1}(\mathbb{C})$. Z warunku $\sum_{i=0}^{2n+1} s_i x_i = 0$ wynika, że macierz M jest antysymetryczna. Jeśli macierz M jest niezdegenerowana, to liniowa zmiana współrzędnych sprowadzi M do standardowej macierzy antysymetrycznej, czyli rozmaitość ta jest kontaktowa. Jeśli macierz M jest zdegenerowana, to jej rząd jest parzysty, czyli kowymiaru co najmniej 2. Wówczas θ nie jest wszędzie epimorfizmem, czyli θ nie wyznacza podwiązki F wiązki stycznej $T\mathbb{P}^{2n+1}$.

Jeśli $d > 1$, to na mocy lematu 2.4 wielomiany $s_0, \ldots, s_{2n+1}$ stanowią R^{2n+2}-ciąg regularny. Wówczas dla $I = (s_0, \ldots, s_{2n+1})$ poniższy ciąg modułów nad R jest minimalną rezolwentą modułu ${}^{R}/_{I}$ ([4], twierdzenie 17.16):

$$\ldots \to R[-2d]^{\oplus\binom{2n+2}{2}} \xrightarrow{\pi_2} R[-d]^{\oplus 2n+2} \xrightarrow{\pi_1} R \to {}^{R}/_{I} \to 0,$$

gdzie $e_0, \ldots, e_{2n+1} \in R[-d]^{\oplus 2n+2}$ generują wolny moduł $R[-d]^{\oplus 2n+2}$ oraz $\pi_1(e_i) = s_i$. Wówczas $\sum_{i=0}^{2n+1} x_i e_i \in \ker \pi_1 = \operatorname{Im} \pi_2$, jednak $\deg(\sum_{i=0}^{2n+1} x_i e_i) = d + 1$, a wszystkie elementy modułu $R[-2d]^{\oplus\binom{2n+2}{2}}$ mają stopień co najmniej $2d$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem $d > 1$.

$\square$

Rozdział 3

Struktura rozmaitości generycznie kontaktowej na urzutowieniu wiązki

W tym rozdziale zajmiemy się strukturami generycznie kontaktowymi na rozmaitości X będącej urzutowieniem wiązki wektorowej E nad rozmaitością Y. W przypadku strutury kontaktowej, gdy dodatkowo Y jest zwartą rozmaitością rzutową, wiązka E oraz iloraz $L = TX/F$ są jednoznacznie wyznaczone (przykład 3.1). W przypadku generycznym, stopień wiązki ilorazowej L okazuje się być dodatni na włóknach (stwierdzenie 3.2). Stwierdzenie 3.4 pokazuje, że dodatkowe założenie o styczności włókien do wiązki F pozwala na skonstruowanie przekształcenia z X do wiązki z przykładu 3.1, stwierdzenie 3.3 podaje warunek wystarczający dla tego nowego założenia. Przy dalszych dodatkowych założeniach, przekształcenie to jest izomorfizmem (stwierdzenie 3.5).

Przykład 3.1. Na urzutowieniu wiązki kostycznej rozmaitości Y istnieje następująca struktura kontaktowa: niech $X = \mathbb{P}(\Omega Y)$ oraz niech $\pi : X \to Y$ to rzutowanie wiązki. Wówczas dla dowolnego $v \in \Omega_y Y \setminus \{0\}$ zachodzi $[v] \in \mathbb{P}(\Omega Y)$ oraz poniższy ciąg jest dokładny:

$$0 \to T_{[v]}\mathbb{P}(\Omega_y Y) \to T_{[v]}X \xrightarrow{T_{[v]}\pi} T_y Y \to 0.$$

Określmy teraz podwiązkę F wiązki TX:

$$F_{[v]} = \ker(v \circ T_{[v]}\pi).$$

Wtedy $L_{[v]} = T_{[v]}X \big/ F_{[v]} = T_y Y / \ker v$, czyli $L^*_{[v]} = \mathbb{C} \cdot v$.

Tak określona struktura jest kontaktowa. Co więcej, jeśli rozmaitość X postaci urzutowienia wiązki E nad zwartą rozmaitością rzutową Y jest wyposażona w strukturę kontaktową, to $E = \Omega Y$ oraz $L \approx \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega Y)}(1)$ ([8], twierdzenie 2.12). Struktury te odpowiadają automorfizmom wiązki kostycznej ΩY ([8], twierdzenie 2.14).

W dalszym ciągu tego rozdziału przyjmijmy następujące oznaczenia: niech E będzie $(a+1)$-wymiarową wiązką wektorową nad b-wymiarową rozmaitością Y, gdzie $b = (2n+1-a)$. Niech $X = \mathbb{P}(E)$. Załóżmy, że $(2n+1)$-wymiarowa rozmaitość X jest wyposażona w strukturę generycznie kontaktową

$$0 \to F \to TX \xrightarrow{\theta} L \to 0.$$

Stwierdzenie 3.2. *Dla każdego włókna zachodzi* $a+1 = (n+1)\deg L|_{\mathbb{P}^a} - \deg B|_{\mathbb{P}^a}$*. W szczególności* $\deg L|_{\mathbb{P}^a} > 0$*.*

Dowód. Wybierzmy ogólne włókno $\mathbb{P}^a \subset X$ oraz ogólną linię $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^a$ we włóknie. Włożenia zadają krótkie ciągi dokładne:

$$0 \to T\mathbb{P}^a|_{\mathbb{P}^1} \to TX|_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}^{2n+1-a}|_{\mathbb{P}^1} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \approx T\mathbb{P}^1 \to T\mathbb{P}^a|_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{a-1} \to 0.$$

Powyższe dwa ciągi na mocy lematu 1.3 świadczą o tożsamości

$$\bigwedge^{2n+1} TX|_{\mathbb{P}^1} = \bigwedge^a (T\mathbb{P}^a|_{\mathbb{P}^1}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\otimes(a-1)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+1).$$

Korzystając ze stwierdzenia 1.6, otrzymujemy

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+1) = \bigwedge^{2n+1} TX|_{\mathbb{P}^1} = L|_{\mathbb{P}^1}^{\otimes(n+1)} \otimes \mathcal{O}(-B)|_{\mathbb{P}^1},$$

gdzie B to dywizor zdegenerowania struktury generycznie kontaktowej. Stąd

$$a + 1 = (n+1)\deg L|_{\mathbb{P}^1} - \deg B|_{\mathbb{P}^1}.$$

Ponieważ linia i włókno są ogólne, to $B|_{\mathbb{P}^1}$ i $B|_{\mathbb{P}^a}$ są efektywne, czyli $\deg B|_{\mathbb{P}^1} = \deg B|_{\mathbb{P}^a} \geq 0$. Zatem $\deg L|_{\mathbb{P}^1} = (\deg B|_{\mathbb{P}^1} + a + 1)/(n+1) > 0$, czyli $\deg L|_{\mathbb{P}^a} > 0$. □

Stwierdzenie 3.3. *Jeśli $a = n$ oraz dla każdego włókna $L|_{\mathbb{P}^a} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(1)$, to włókna X nad Y są styczne do F.*

Dowód. Rozpatrzmy włókno $\mathbb{P}^n \subset X$. Złożenie $T\mathbb{P}^n \hookrightarrow TX|_{\mathbb{P}^n} \twoheadrightarrow L|_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ jest elementem $\mathrm{Hom}(T\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \Omega\mathbb{P}^n(1)) = H^0(\Omega\mathbb{P}^n(1))$.

Ciąg Eulera (lemat 1.7) po zdualizowaniu i skręceniu przyjmuje postać

$$0 \to \Omega\mathbb{P}^n(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to 0.$$

Ten krótki ciąg dokładny indukuje długi ciąg dokładny grup kohomologii:

$$0 \to H^0(\Omega\mathbb{P}^n(1)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1}) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to \ldots,$$

gdzie elementy $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1})$, czyli przekroje (n+1)–wymiarowej wiązki trywialnej, odpowiadające (n+1)–elementowym ciągom funcji stałych $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, przechodzą na przekroje wiązki $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ postaci $a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ to współrzędne jednorodne na $\mathbb{P}^n$. Zatem $\mathrm{Hom}(T\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = H^0(\Omega\mathbb{P}^n(1))$ jako jądro izomorfizmu jest grupą trywialną, czyli złożenie $T\mathbb{P}^n \hookrightarrow TX|_{\mathbb{P}^n} \twoheadrightarrow L|_{\mathbb{P}^n}$ jest zerowe. Stąd włożenie $T\mathbb{P}^n \hookrightarrow TX|_{\mathbb{P}^n}$ faktoryzuje się przez $TF|_{\mathbb{P}^n} \hookrightarrow TX|_{\mathbb{P}^n}$, czyli włókna są styczne do podwiązki F. □

Stwierdzenie 3.4. *Jeśli włókna X nad Y są styczne do wiązki F, to istnieje naturalne przekształcenie $X \to \mathbb{P}(\Omega Y)$ struktur generycznie kontaktowych, zachowujące włókna nad Y.*

Dowód. Rzutowanie wiązki $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ zadaje ciąg dokładny wiązek wektorowych nad rozmaitością X

$$0 \to \pi^*\Omega Y \to \Omega X \to \Omega X/Y \to 0,$$

a odwzorowanie ilorazowe $TX \twoheadrightarrow L$ zadaje włożenie $L^* \hookrightarrow \Omega X$. Ponieważ włókna X nad Y są styczne do F, to złożenie $L^* \hookrightarrow \Omega X \twoheadrightarrow \Omega X/Y$ jest zerowe, czyli włożenie to faktoryzuje się przez $\iota : L^* \hookrightarrow \pi^*\Omega Y$. Włożenie ι zadaje przekształcenie rozmaitości $\Phi : X \to \mathbb{P}(\Omega Y)$, które zachowuje włókna nad Y.

Lokalnie wiązka E trywializuje się nad dyskiem $D^b \subset Y$, czyli rozmaitość X jest lokalnie postaci $D^b \times \mathbb{P}^a$. Stąd przestrzeń styczna w punkcie $x = (y, z) \in X$ jest postaci $T_y D^b \oplus T_z \mathbb{P}^a$. Styczność włókien do wiązki F oznacza, że złożenie

$$T_z\mathbb{P}^a \hookrightarrow T_x X \xrightarrow{\theta} L_x$$

jest zerowe. Zatem skręcona forma θ jest postaci $\theta(y, z) = \sum_{i=1}^{b} s_i(y, z)\mathrm{d}y_i$. Przy tych oznaczeniach, dla punktu $x = (y, z) \in X$ zachodzi

$$\Phi(y, z) = \big(y, [s_1(y, z) : \ldots : s_b(y, z)]\big) \in Y \times \mathbb{P}(\Omega_y Y).$$

Niech $p : \mathbb{P}(\Omega Y) \to Y$ oznacza rzutowanie wiązki, niech $y \in Y$, $\varphi \in \mathbb{P}(\Omega_y Y)$. Na rozmaitości $\mathbb{P}(\Omega Y)$ forma kontaktowa z przykładu 3.1 w punkcie $(y, \varphi) \in \mathbb{P}(\Omega Y)$ jest postaci

$$\mathrm{ev}_{(y,\varphi)} : T_{(y,\varphi)}\mathbb{P}(\Omega Y) = T_y Y \oplus T_\varphi \mathbb{P}(\Omega_y Y) \xrightarrow{T_{(y,\varphi)}p} T_y Y \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(1).$$

Aby przekształcenie Φ zachowywało strukturę generycznie kontaktową, musi zachodzić $(\mathrm{ev} \circ T\Phi)|_F = 0$. Niech $(u, v) \in T_y Y \oplus T_z \mathbb{P}^a = T_x X$. Wówczas jeśli $(u, v) \in F_x$, czyli $u \in \ker \varphi$, gdzie $\varphi = [s_1(y, z) : \ldots : s_b(y, z)]$, to

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{ev}_{(y,\varphi)} \circ T_x\Phi\big)(u, v) = \big(\varphi \circ T_{(y,\varphi)}p \circ T_x\Phi\big)(u, v) = \big(\varphi \circ T_x(p \circ \Phi)\big)(u, v) = \big(\varphi \circ T_x\pi\big)(u, v) = \\ = \varphi(u) = 0.\end{aligned}$$

Zatem tak określone przekształcenie Φ zachowuje strukturę generycznie kontaktową. □

Stwierdzenie 3.5. *Jeśli* $\deg B|_{\mathbb{P}^a} = 0$ *(na przykład, gdy dywizor* B *jest cofnięciem pewnego dywizora z bazy* Y*), to struktura na* X *jest izomorficzna z opisaną w przykładzie 3.1.*

Dowód. Ponieważ $\deg B|_{\mathbb{P}^a} = 0$, to ze stwierdzenia 3.2 zachodzi równość $a + 1 = (n + 1)\deg L|_{\mathbb{P}^a}$. Jednocześnie $1 \le a \le 2n$, więc $a = n$ oraz $\deg L|_{\mathbb{P}^a} = 1$. Stąd na mocy stwierdzenia 3.3 włókna X nad Y są styczne do F, czyli stwierdzenie 3.4 pozwala na skonstruowanie przekształcenia $X \to \mathbb{P}(\Omega Y)$.

Niech $y \in Y$, $\mathbb{P}^a = \pi^{-1}(y)$. Nad tym włóknem

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-1) = L^*|_{\mathbb{P}^a} \hookrightarrow \pi^*\Omega Y|_{\mathbb{P}^a} = \mathbb{P}^a \times \Omega_y Y.$$

Powyższe włożenie jest elementem

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}^{a+1}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)^{a+1}) = H^0(\mathcal{O}(1)^{n+1}) = \mathrm{Mat}_{n+1}^{n+1}(\mathbb{C}).$$

Liniowa zmiana parametryzacji $\mathbb{P}^a$ oraz zmiana bazy $\mathcal{O}(1)^{n+1}$ zadają liniowe zamiany współrzędnych w dziedzinie i przeciwdziedzinie tej macierzy. W odpowiednio dobranych bazach przyjmuje ona postać macierzy diagonalnej z jedynkami i zerami na przekątnej. Jednak to przekształcenie wiązek jest włożeniem, czyli wyznaczony przez nie przekrój nie zeruje się, więc macierz ta jest monomorfizmem. Stąd w tych współrzędnych macierz jest identycznością oraz

$$L^*|_{\mathbb{P}^a} = \{(x, v) : x = \mathbb{P}(v)\} \subset \mathbb{P}^a \times \Omega_y Y.$$

Zatem przekształcenie struktur generycznie kontaktowych $X \to \mathbb{P}(\Omega Y)$ jest izomorfizmem między X a strukturą opisaną w przykładzie 3.1. □

Przykład 3.6. W wymiarze 3, czyli gdy $n = 1$, a może przyjąć wartość 1 lub 2. Równość wymiarów ze stwierdzenia 3.2 przybiera więc postać $\deg B|_{\mathbb{P}^a} + a + 1 = 2 \deg L|_{\mathbb{P}^a}$.

Przy ustalonej wartości $\deg B|_{\mathbb{P}^a}$, stopień $\deg L|_{\mathbb{P}^a}$ przyjmuje całkowitą wartość spośród $\{(\deg B|_{\mathbb{P}^a} + 2)/2, (\deg B|_{\mathbb{P}^a} + 3)/2\}$. W szczególności, dla $\deg B|_{\mathbb{P}^a} = 0$ zachodzi $\deg L|_{\mathbb{P}^a} = 1$.

Przy ustalonej wartości $\deg L|_{\mathbb{P}^a}$, $\deg B|_{\mathbb{P}^a}$ przyjmuje jedną z dwóch wartości $\{2 \deg L|_{\mathbb{P}^a} - 2, 2 \deg L|_{\mathbb{P}^a} - 3\}$. W szczególności, dla $\deg L|_{\mathbb{P}^a} = 1$ jedna z tych wartości jest ujemna, a dla włókna ogólnego $B|_{\mathbb{P}^a}$ jest efektywny. Stąd $\deg B|_{\mathbb{P}^a} = 0$.

Warunki $\deg B|_{\mathbb{P}^a} = 0$ oraz $\deg L|_{\mathbb{P}^a} = 1$ są więc równoważne oraz na mocy stwierdzenia 3.5 rozmaitość X jest wtedy urzutowieniem wiązki z przykładu 3.1.

Rozdział 4

Lokalna postać formy generycznie kontaktowej na rozmaitości 3-wymiarowej

Znana jest lokalna postać formy kontaktowej – twierdzenie Darboux mówi, że lokalnie w pewnych współrzędnych

$$\theta = \mathrm{d}x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{d}x_{n+i}$$

([1], dodatek 4., podrozdział H – rozumowanie to jest poprawne także w przypadku zespolonym). Poniżej opisuję podobną postać formy generycznie kontaktowej w wymiarze 3.

Stwierdzenie 4.1. *Na rozmaitości 3-wymiarowej lokalnie istnieją współrzędne holomorficzne x_1, x_2, x_3 oraz wybór trywializacji wiązki L, w których forma generycznie kontaktowa θ ma postać*

$$\theta = f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2.$$

Dowód. Niech $x \in X$, gdzie X jest 3-wymiarową rozmaitością generycznie kontaktową. Wybierzmy w otoczeniu x nieznikający przekrój wiązki F. Następnie wyprostujmy pole wektorowe, które ten przekrój wyznacza, to znaczy znajdźmy układ współrzędnych, w których przekrój ten to $\partial/\partial x_3$ ([7], twierdzenie 1.18), być może pomniejszając otoczenie x. Otrzymujemy układ współrzędnych x_1, x_2, x_3 na otoczeniu x, spełniający $\theta(\partial/\partial x_3) = 0$, czyli θ jest postaci

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \tilde{f}(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1 + g(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_2$$

dla pewnych funkcji $\tilde{f}, g$. Bez straty ogólności $g(x) \neq 0$, czyli w pewnym otoczeniu x funkcja g przyjmuje niezerowe wartości. Skalując lokalną parametryzację L przez czynnik $1/g$, otrzymujemy postać

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2.$$

□

Rozpatrzmy teraz formę θ o postaci ze stwierdzenia 4.1. Wówczas

$$\mathrm{d}\theta \wedge \theta = (\partial f/\partial x_2 \cdot \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial f/\partial x_3 \cdot \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1) \wedge (f\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2) = \partial f/\partial x_3 \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

Forma θ jest więc kontaktowa, gdy funkcja $\partial f/\partial x_3$ nie zeruje się, a jest ona generycznie kontaktowa, gdy funkcja ta jest niezerowa.

Przykład 4.2. Przeciągnięcie formy kontaktowej wzdłuż rozdmuchania w przykładzie 1.9 prowadziło do otrzymania formy

$$\theta = -u_3 \mathrm{d}u_1 + u_1^2 \mathrm{d}u_2 - u_1 \mathrm{d}u_3.$$

Nie jest ona epimorfizmem wzdłuż krzywej $u_1 = u_3 = 0$, jednak

$$\mathrm{d}\theta \wedge \theta = (2u_1 \cdot \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2) \wedge (-u_3 \mathrm{d}u_1 + u_1^2 \mathrm{d}u_2 - u_1 \mathrm{d}u_3) = -2u_1^2 \cdot \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2 \wedge \mathrm{d}u_3,$$

czyli θ jest zdegenerowana na większym zbiorze $u_1 = 0$. Rozpatrzmy tę formę w otoczeniu punktu $x = (0, 0, 1)$. Wybierzmy niezdegenerowany przekrój V wiązki $\ker \theta$

$$V = \partial/\partial u_2 + u_1 \cdot \partial/\partial u_3.$$

Zmiana współrzędnych

$$(u_1, u_2, u_3) = (v_2, v_3, v_1 + v_2 v_3)$$

prostuje pole V do pola $\partial/\partial v_3$, prowadząc do postaci formy

$$\theta = -v_2 \mathrm{d}v_1 - (v_1 + 2v_2 v_3)\mathrm{d}v_2.$$

W nowych współrzędnych punkt x przechodzi na punkt $(1, 0, 0)$, czyli w pewnym otoczeniu x funkcja $-(v_1 + 2v_2 v_3)$ nie przyjmuje wartości zerowej. Po przeskalowaniu lokalnej parametryzacji L przez czynnik $-1/(v_1 + 2v_2 v_3)$ otrzymujemy postać

$$\theta = v_2/(v_1 + 2v_2 v_3)\mathrm{d}v_1 + \mathrm{d}v_2.$$

4.1. Lokalne niezmienniki

Otrzymana w stwierdzeniu 4.1 lokalna postać formy nie jest jednoznaczna.

Przykład 4.3. Niech $\theta = x_3^2 \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$. Dla ustalonego parametru $t \in [0, 1]$, zamiana zmiennych

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = \big(y_1 - 2y_3,\, y_2 - \tfrac{t^2}{12} y_1^3 + \tfrac{t^2}{2} y_1^2 y_3 + t(1-t) y_1 y_3^2 + \tfrac{2}{3}(1-t)^2 y_3^3,\, \tfrac{t}{2} y_1 + (1-t) y_3\big)$$

przeprowadza formę θ na

$$\theta = \big(t y_1 y_3 + (1-t) y_3^2\big)\mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}y_2.$$

Nie wszystkie formy są lokalnie równoważne, świadczą o tym niezmienniki zmiany współrzędnych. Jednym z nich jest dywizor B zerowania się przekroju $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n} \wedge \theta$, liczba jego składowych i ich krotności oraz typ osobliwości. W dalszej części pracy opiszemy dokładniejszy niezmiennik.

Załóżmy, że dywizor B jest gładki. Wówczas wiązki TB oraz $F|_B$ stanowią dwie podwiązki kowymiaru 1 wiązki stycznej $TX|_B$. Ich przecięcie w każdym punkcie ma kowymiar 1 lub 2. Niech

$$\sigma = \{x \in B \mid T_x B = F_x\}.$$

Korzystając ze stwierdzenia 4.1, w wymiarze $2n + 1 = 3$ należenie do dywizora B degeneracji struktury zadanej przez $\theta(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$ odpowiada spełnianiu równania $\partial f/\partial x_3 = 0$. Natomiast równość wiązek $TB = F$, czyli liniowa zależność wektorów

$(\nabla \partial f/\partial x_3)^T$ i θ, wyraża się jako układ równań $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_3 - f \cdot \partial^2 f/\partial x_2 \partial x_3 = \partial^2 f/\partial x_3^2 = 0$. Stąd σ jest domkniętym zbiorem postaci

$$\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \partial f/\partial x_3 = 0,\ \partial^2 f/\partial x_3^2 = 0,\ \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_3 = f \cdot \partial^2 f/\partial x_2 \partial x_3\}.$$

Gdy dywizor B nie jest gładki, określmy σ jako

$$\sigma = \overline{\{x \in B_0 \mid T_x B = F_x\}},$$

gdzie B_0 to punkty gładkie składowych pierwszych dywizora B.

Przykład 4.4. Niech $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_2 = 0\}$. Poniższe trzy różne formy, których dywizory degeneracji są równe B, są parami nieizomorficzne:

1. $\theta_1 = x_2 x_3 \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, dla tej formy $\sigma = B$, czyli dywizor B jest styczny do podwiązki F.
2. $\theta_2 = (x_2 x_3 + 1)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, tutaj $\sigma = \emptyset$, czyli $TB \cap F|_B$ jest wiązką 1-wymiarową.
3. $\theta_3 = (x_2 x_3 + x_1)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, wówczas $\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$.

Możliwe są również inne podzbiory, wzdłuż których $TB = F|_B$:

4. $\theta = (x_3^3 + x_2 x_3 + x_1)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, dla niej $B = Z(3x_3^2 + x_2)$, $\sigma = \{(0, 0, 0)\}$.
5. $\theta = (x_3^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + 1)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, wtedy $B = Z(3x_3^2 + x_1^2 x_2^2)$, $\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_3 = x_1 x_2 = 0\}$.
6. $\theta = (\frac{1}{2} x_1 x_2 x_3^2 + 1)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, co daje $B = Z(x_1 x_2 x_3)$, $\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 x_2 = x_1 x_3 = x_2 x_3 = 0\}$.

Przykład 4.5. Rozpatrywana w przykładzie 4.2 forma $\theta = -u_3 \mathrm{d}u_1 + u_1^2 \mathrm{d}u_2 - u_1 \mathrm{d}u_3$ spełnia $\mathrm{d}\theta \wedge \theta = -2u_1^2 \cdot \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2 \wedge \mathrm{d}u_3$. Stąd jej dywizor degeneracji w otoczeniu punktu $x = (0, 0, 1)$ to $B = Z(u_1^2)$ oraz

$$TB = \ker \mathrm{d}u_1 = \ker(\theta|_B).$$

Zatem dla tej formy generycznie kontaktowej $\sigma = B$.

Przykład 4.6. Forma z przykładu 1.10 jest lokalnie postaci $\theta = x_3^2 \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$. Tutaj $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2$, czyli w każdym punkcie $\partial^2 f/\partial x_3^2 = 1 \neq 0$. Stąd dla tej formy generycznie kontaktowej $\sigma = \emptyset$.

Bibliografia

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics 60, 1989.

[2] Jarosław Buczyński, *Algebraic Legendrian Varieties*, Dissertationes Mathematicae 467 (2009), pages 1–86.

[3] Jarosław Buczyński, Grzegorz Kapustka, Michał Kapustka, *Special lines on contact manifolds*, arXiv:1405.7792v2, 2016.

[4] David Eisenbud, *Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics 150, 1995.

[5] Hansjörg Geiges, *A brief history of contact geometry and topology*, Expositiones Mathematicae Volume 19, Issue 1, 2001, pages 25–53.

[6] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics 52, 1977.

[7] Yulij Ilyashenko, Sergei Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, American Mathematical Society Graduate Studies in Mathematics 86, 2008.

[8] Stefan Kebekus, Thomas Peternell, Andrew J. Sommese, Jaroslaw Wisniewski, *Projective Contact Manifolds*, Inventiones mathematicae Volume 142, Issue 1, 2000, pages 1–15.

[9] Claude LeBrun, *Fano manifolds, contact structures, and quaternionic geometry*, International Journal of Mathematics 6 (1995), pages 419–437.