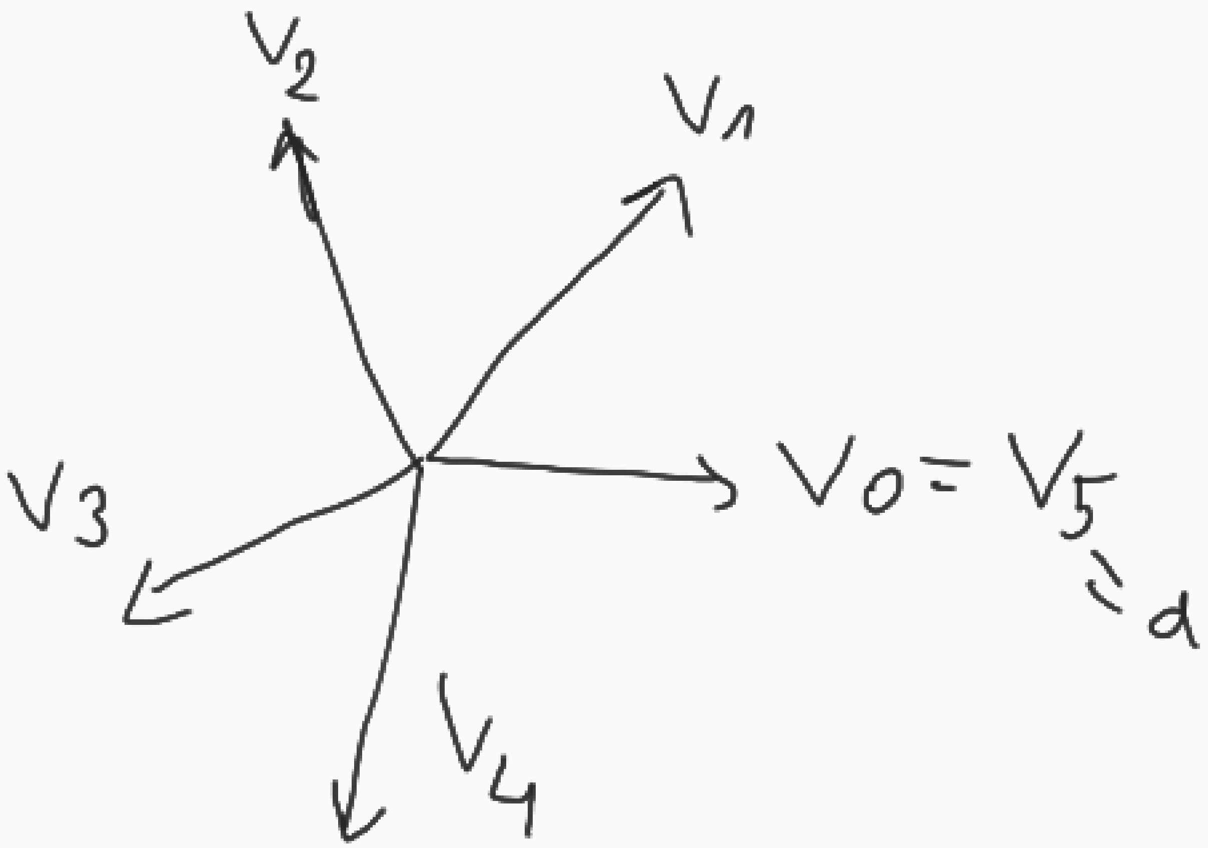
2.5. Nonsingular surfaces



+ zupełne

+ v_i, v_{i+1} generują N

$\det(v_i, v_{i+1}) = \pm 1$

$\Downarrow$

v_0, v_1 generują N

v_1, v_2 generują N $\Rightarrow$ $v_2 = -v_0 + a_1 v_1$

Ogólnie $a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}$ $\quad 1 \le i \le d$

Lemat: Niemożliwym jest, żeby v_j leżał pomiędzy v_{i+1} a $-v_i$

a v_{j+1} pomiędzy $-v_i$ a $-v_{i+1}$

Dowód:

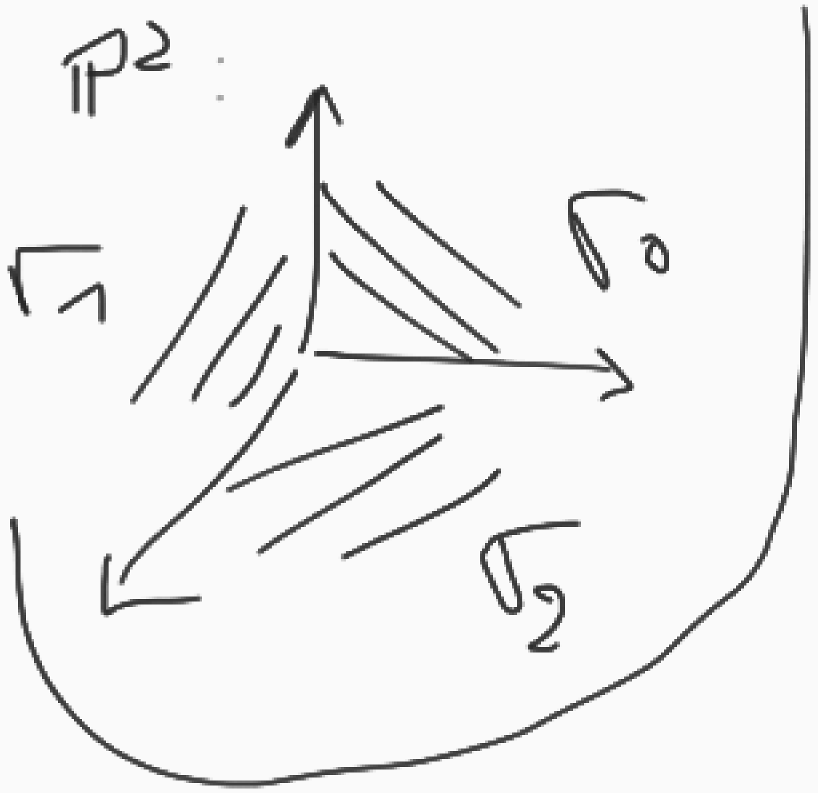
$v_j = -a v_i + b v_{i+1}$ $\qquad$ $v_{j+1} = -c v_i - d v_{i+1}$

$a, b, c, d > 0$

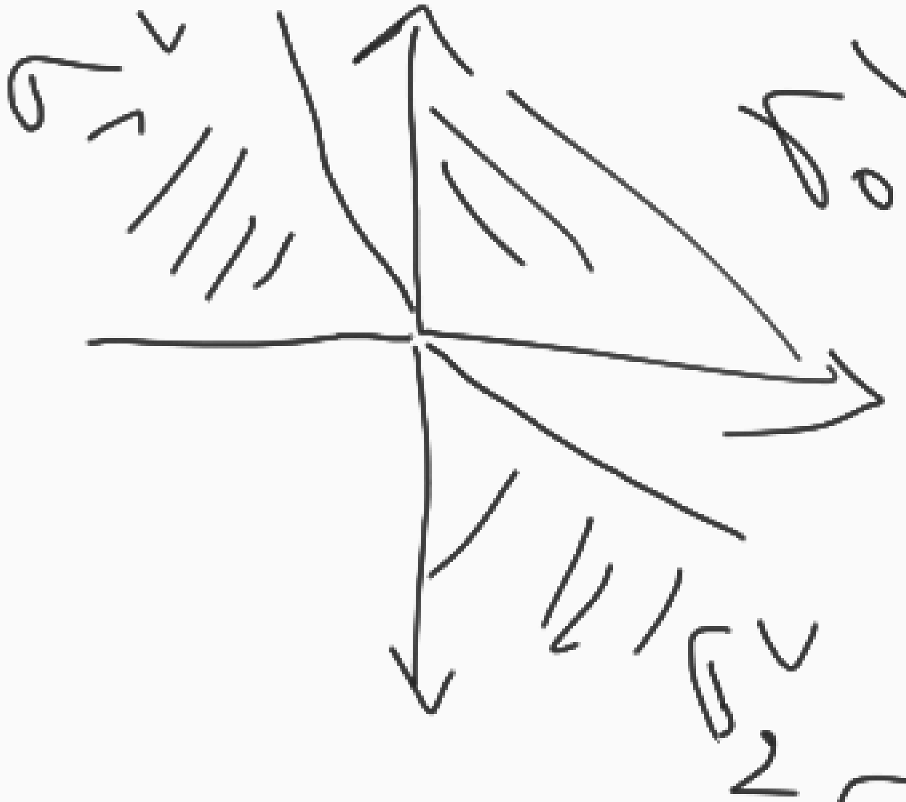
$$\det\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = 1 \qquad ad + bc \geq 2$$

UWAGA: Geometria rozmaitości torycznej jest całkowicie określona przez stowarzyszony wachlarz.

Tw
→ $d=3$ otrzymujemy $U_\sigma = \mathbb{P}^2$
→ $d=4$ otrzymujemy $U_\sigma = \mathbb{F}_a$ (powierzchnie Hirzebrucha)
→ $d \geq 5$ U_σ powstaje albo z $\mathbb{P}^2$ albo z $\mathbb{F}_a$ poprzez rozdmuchania w T_N-punktach



$\xrightarrow{\text{dual}}$



$\mathbb{P}^2$: $(T_0 : T_1 : T_2)$

$X = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)$

$Y = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

V_{σ_0} jest izo z $\mathbb{C}^2$

dla σ_0 współrzędne (X, Y)

σ_1 $\quad (X^{-1}, X^{-1}Y)$

σ_2 $\quad (Y^{-1}, XY^{-1})$

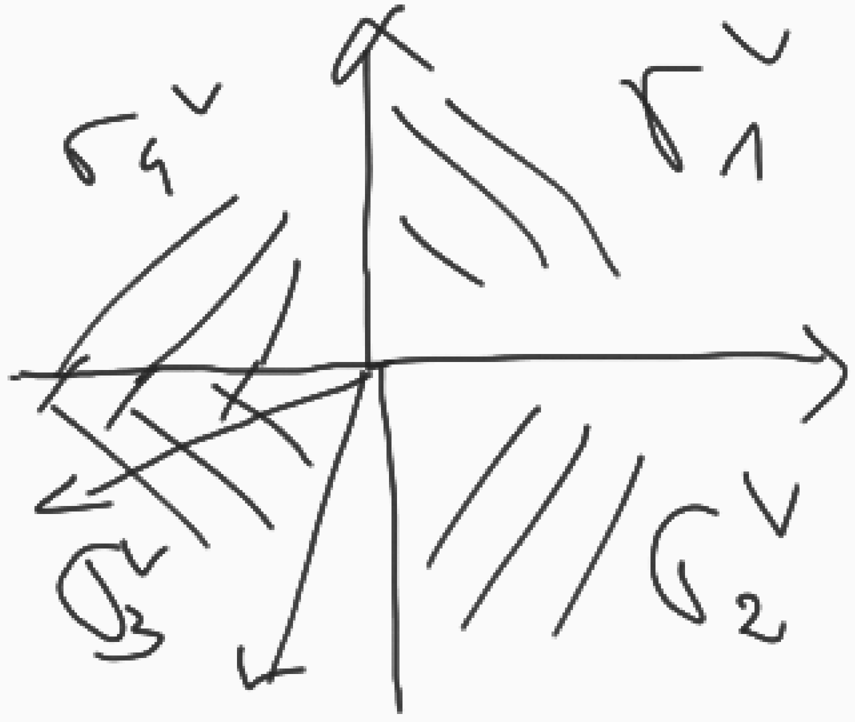
v_0 , v_1 BAZA

$a_2 v_2 = v_0 + v_1$

$a_2 = \pm 1$

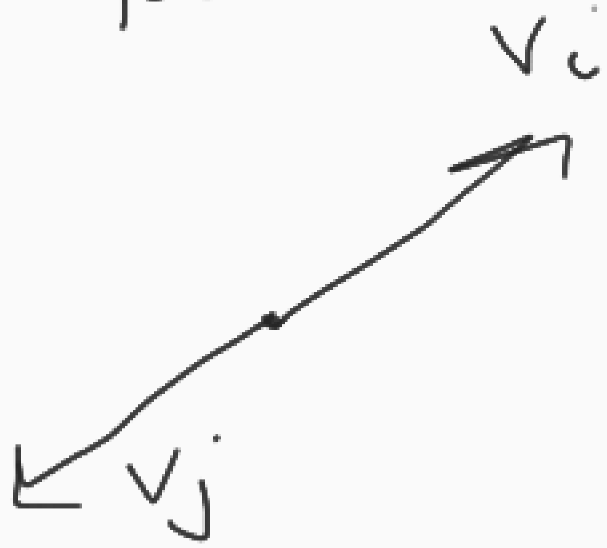
$d=4$ POWIERZCHNIA $\mathbb{F}_a$

dual $\rightsquigarrow$



Lemat: Dla $d \geq 4$ musi istnieć para wektorów v_i, v_j t, że

$v_i = -v_j$



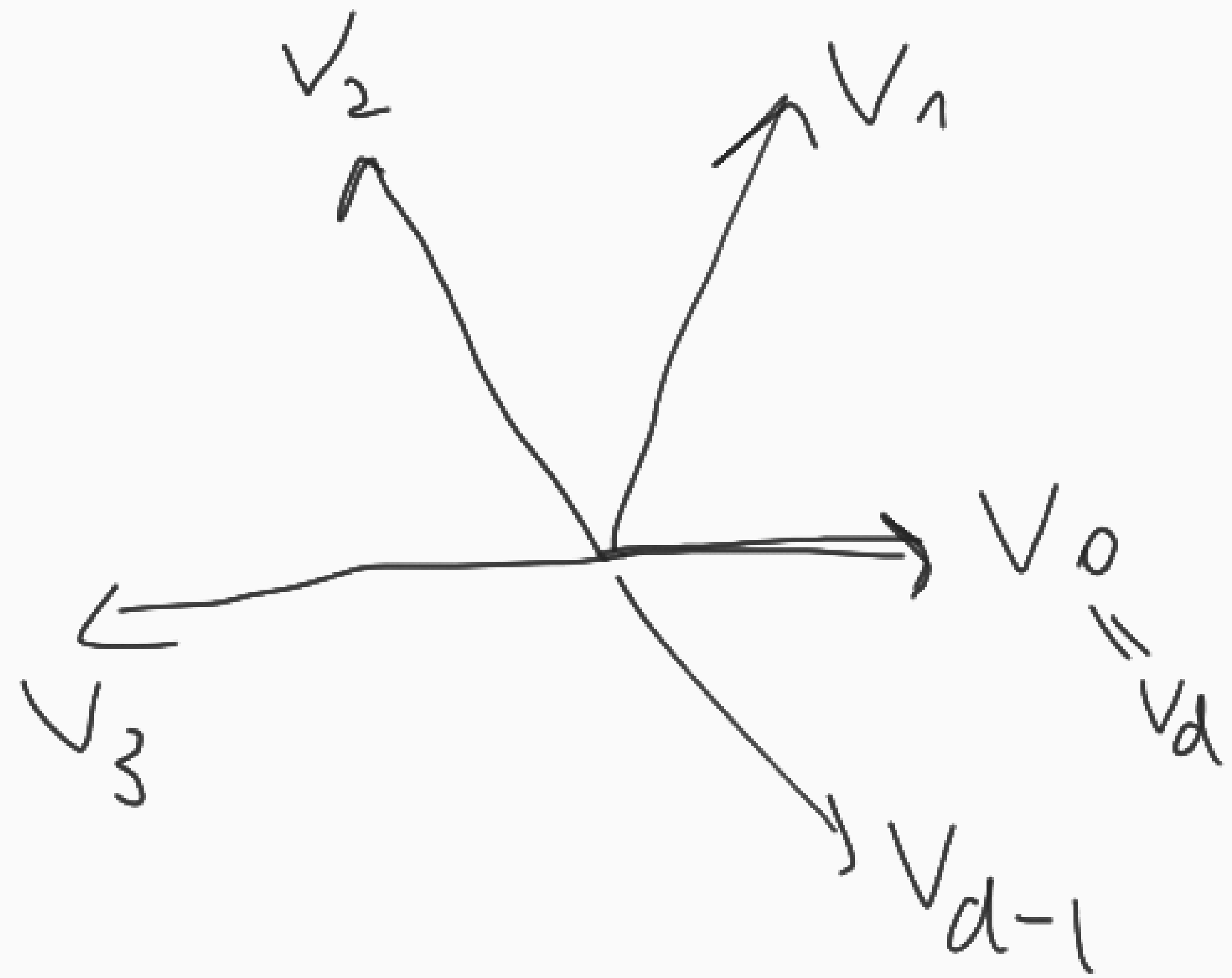
$$\begin{array}{ccccc} (x^{-1}, x^a y) & \longleftrightarrow & (x,y) & \leftarrow & \mathbb{C}\times\mathbb{P}^1 \\ \uparrow & & \updownarrow & & \\ (x^{-1}, x^{-a} y^{-1}) & \longleftrightarrow & (x, y^{-1}) & \leftarrow & \mathbb{C}\times\mathbb{P}^1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}^1$ - wiązka nad $\mathbb{P}^1$.

$$\underline{\text{TW}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & a_0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & a_d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}v_i\\ v_{i+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & a_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{i-1}\\ v_i\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_i = v_i \\ v_{i+1} = -v_{i-1} + a_i v_i \end{cases}$$



Exercise / p. 44

a) $d \geq 4$ $\qquad v_j = -v_i$

b) Załóżmy, że $v_i = -v_0$ dla $i \geq 3$

Pokaż, że $v_j = v_{j-1} + v_{j+1}$ dla pewnego $0 < j < i$

$\dashrightarrow$ m.h ?

Lemat

Dowód

$v_j = -v_i$ $\quad d \geq 4$

- $d = 4$

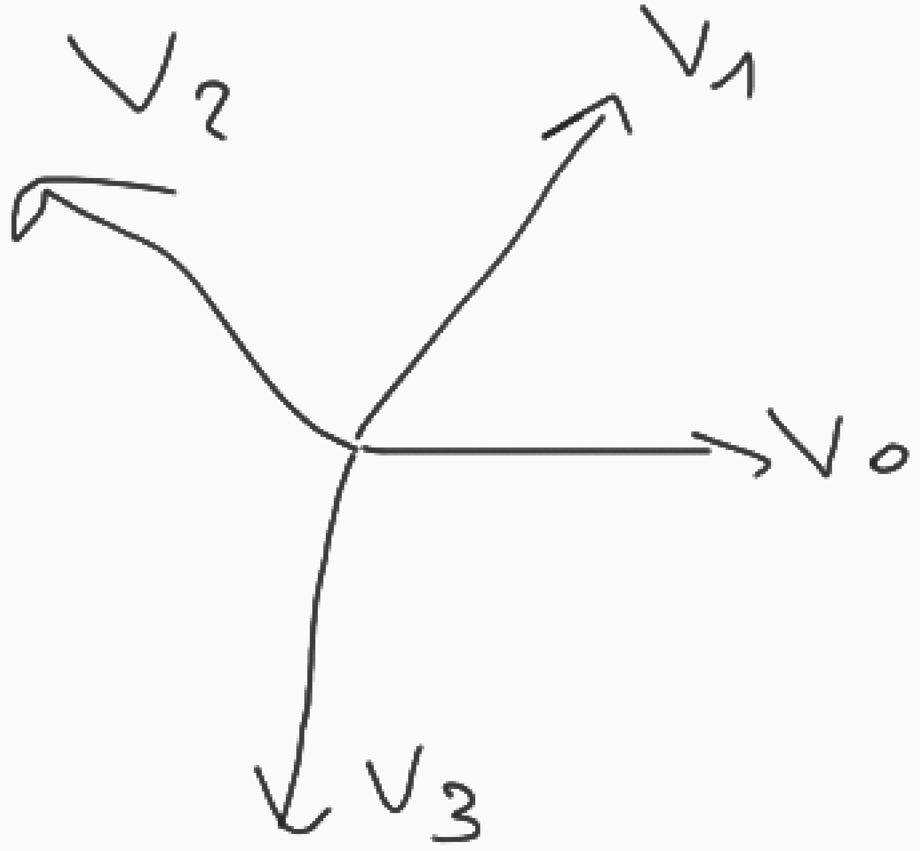
$a_1 v_1 = v_0 + v_2$

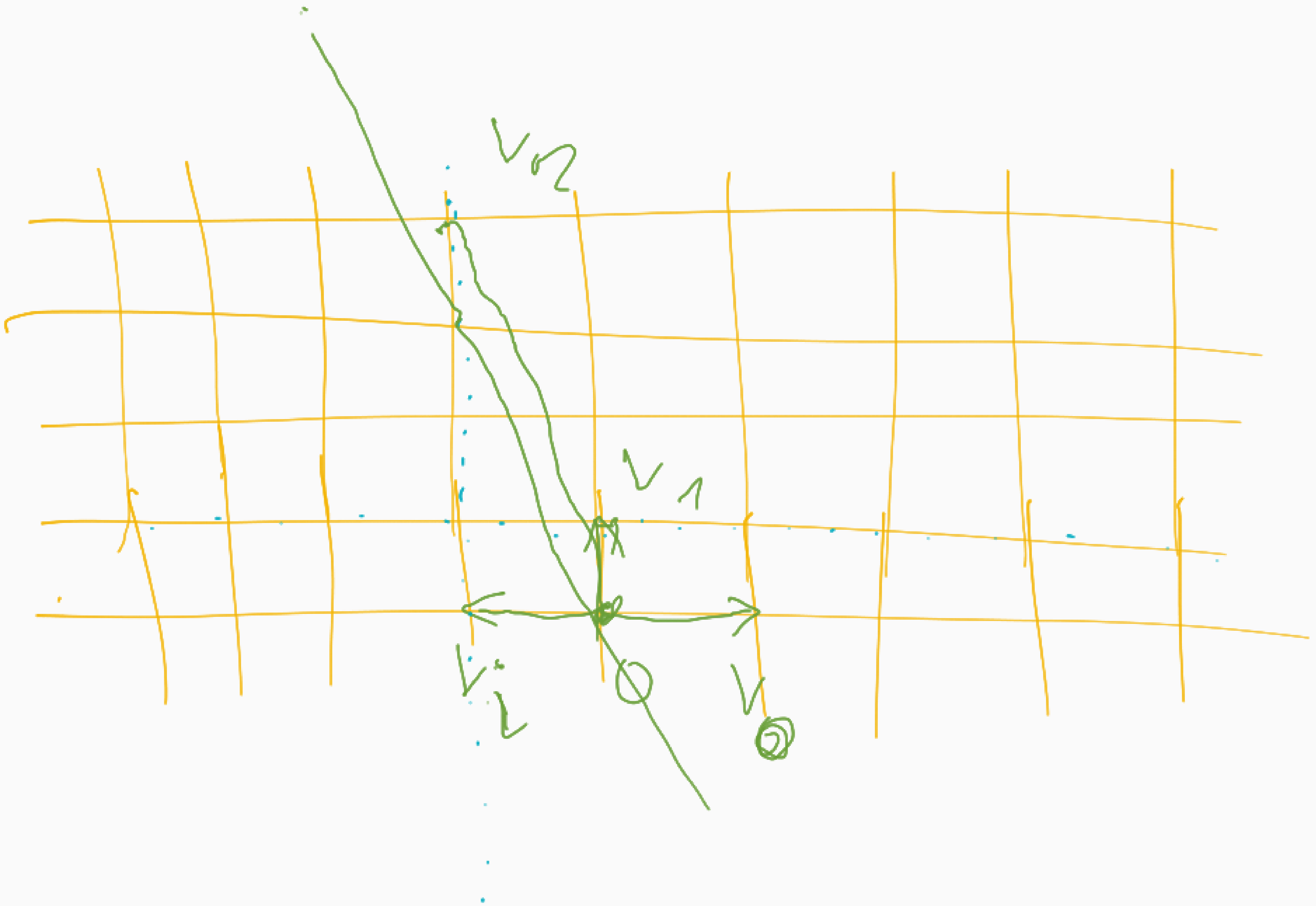
$a_2 v_2 = v_1 + v_3$

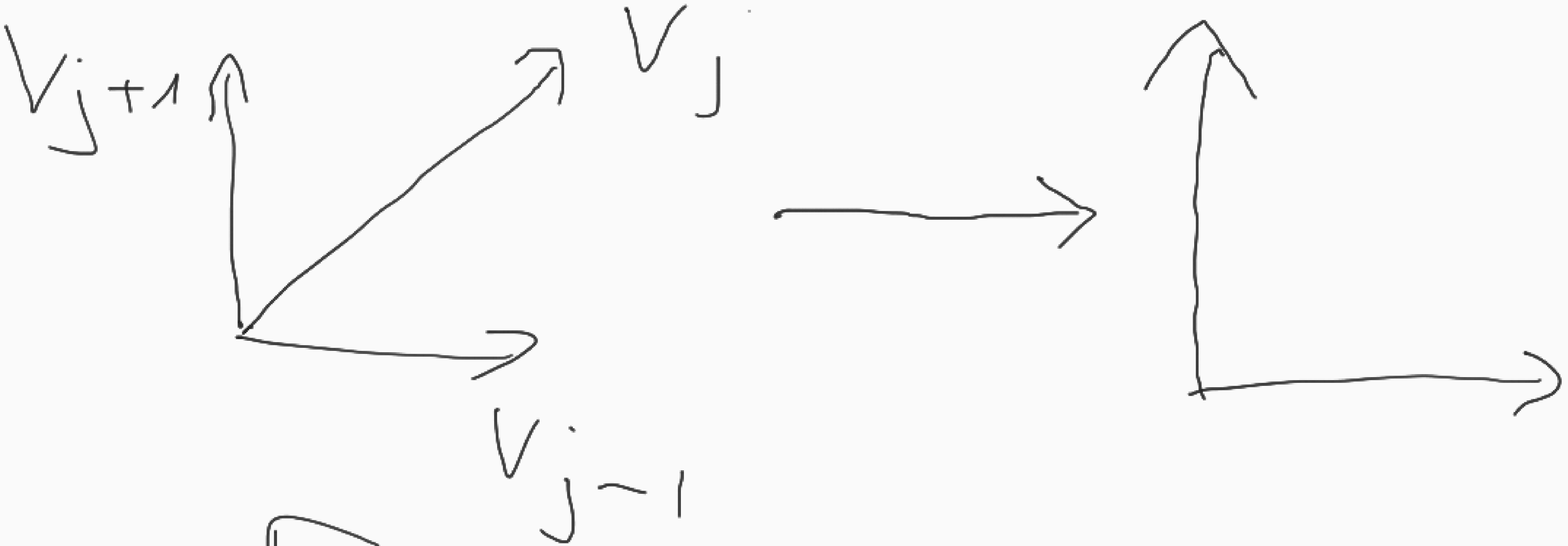
$a_3 v_3 = v_2 + v_4 \; (= v_0)$

$a_4 v_4 = v_3 + v_1$

$\;\; = v_0$




v2
v1
vi
v
0
v0



ROZDMUCHANIE