TOP

$$\begin{array}{ccc} N & & M = N^\vee \\ \cap & & \cap \\ N_\sigma & & M_{\mathbb{R}} \\ \cup & & \cup \\ \sigma & & \sigma^\vee \end{array} \qquad S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$$

$U_\sigma = \operatorname{Spec} R[S_\sigma]$

- $\sigma = \{0\}$ $\quad U_\sigma = \operatorname{Spec} R[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}] = \mathbb{G}_m^n$

$R[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}] \longrightarrow$ ~ ⊗ ~

$x_i \longrightarrow x_i \otimes x_i$

$\mathbb{G}_m^n \times U_\sigma \longrightarrow U_\sigma$

$R[S_\sigma] \longrightarrow R[S_\sigma] \otimes R[M] \xrightarrow{x \otimes t} R \otimes R \circlearrowleft R$

$\chi^u \qquad \chi^u \otimes \chi^u$

10 x

$\mathbb{G}_m^n \times \mathbb{G}_m^n \times U_\sigma \longrightarrow \mathbb{G}_m^n \times U_\sigma$

MULTIPLIKACJA

MNOŻENIE X TOR

$\downarrow \qquad \downarrow$ OGRANICZENIE

$\mathbb{G}_m^n \times U_\sigma \xrightarrow{\text{MNOŻENIE}} U_\sigma$

$(U_\sigma \to \operatorname{Spec} R) \simeq \operatorname{Hom}_{\text{mon}}(S_\sigma \to (R, \cdot))$

$T_N = R$ Punkty na torusie $\quad \mathbb{G}_m^n \simeq \operatorname{Hom}(M, (R, \cdot)) \simeq \operatorname{Hom}(M, (R^\times, \cdot))$

$\forall t \in U_\sigma \quad \chi t(u) = \chi \otimes t(\chi^u \otimes \chi^u) = \chi(u)\, t(u)$

$\forall t : S_\sigma \to (R, \cdot)$

$\tau \subset \sigma \quad U_\tau \subset U_\sigma$

$U_{\{0\}} \subset U_\sigma$

$\sigma' \subset N'_{\mathbb{R}} \quad \sigma \subset N_{\mathbb{R}}$

$\varphi(\sigma') \subset \sigma$

$N' \longrightarrow N$

$$\begin{array}{ccc} M' & \longleftarrow & M \\ \cup & & \cup \\ S_{\sigma'} & \longleftarrow & S_\sigma \end{array}$$

$R[S_{\sigma'}] \leftarrow R[S_\sigma]$

$U_{\sigma'} \longrightarrow U_\sigma$

$U_\sigma \simeq \mathbb{A}_R^k \times \mathbb{G}_m^{n-k}$

$\downarrow$

Spec R

Scrapbook

Przemalejo $\quad U_\sigma$ jest gładkie $\quad \operatorname{Spec} R \Leftrightarrow$ jest postaci $\mathbb{A}^k \times \mathbb{G}_m^{n-k}$

$\Leftarrow$

$\Rightarrow \quad x_\sigma \in U_\sigma$ punkt $\quad S_\sigma \to (R, \cdot) \quad v_x(u) = \begin{cases} 1 & u \in \sigma^\perp \subset M \\ 0 & u \notin \sigma^\perp \end{cases}$

$u = \chi_\tau \beta \quad \sigma^\perp = \{u \in M \mid u(\sigma) = 0\}$

$\tau \subset \sigma \quad \sigma \cap \tau^\perp \in \sigma^\vee$

$\sigma^\perp \subset \sigma^\vee$

$\left.\begin{array}{l} \alpha, \beta \in \sigma^\vee \\ \alpha + \beta \in \sigma^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha, \beta \quad \sigma \sigma^\perp$

x_σ jest homomorfizmem monoidów

$\eta \subset R \leftarrow$ Ideał maksymalny

$R[S_\sigma] \supseteq U_\sigma \longrightarrow U_\sigma$

jest $\downarrow \quad \downarrow$ jest

$\operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} R$

$\uparrow \sigma \sim$ Rozpięte przez bazę kanoniczną $\quad N_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{G}_m^n = \mathbb{k}[M] = \mathbb{k}[S_\sigma]$ - gładkie

$\sim$ Homo-iso

$T_x U_\sigma = m/m^2 \quad , \quad \sigma^\perp = \{0\}$

$m = (\{\chi^u \mid u \neq 0\})$

$m^2 = (\{\chi^u \mid u \neq 0, u_1 + u_2 \neq u_3\})$

$S_\sigma \quad$ Zadane zbiorem $\quad m/m^2$

Pierwsze elementy na każdej krawędzi

$\sigma -$ Suble wszystkie rozpięte $\quad \sigma^\vee -$ Suble wszystkie rozpięte

$\sigma -$ Ma co najmniej 1 krawędź $\Leftrightarrow \sigma^\vee$ ma co najmniej 1 krawędź

$\dim U_\sigma = n \Rightarrow \sigma^\vee$ ma co najmniej n krawędzi

Pierwsze elementy na krawędziach generują całe $\quad S_\sigma$

$S_\sigma + (-S_\sigma) = M$

$x \in M \quad x = \underset{\in \sigma^\vee}{a} - \underset{\in \sigma^\vee}{b}$

$a = \sum r_i \alpha_i \quad \alpha_i \in S_\sigma \quad r_i \in R$

$S_\sigma \ni \tilde{a} = \sum \lceil r_i \rceil \alpha_i, \quad \tilde{a} - a \in \sigma^\vee$

$M \quad a x - \underset{\in \sigma^\vee}{\tilde{a}} \in -\sigma^\vee$

$\cap$

$M \quad S^\sigma$

$x = \tilde{a} - \sigma - b$

Pierwsze elementy na krawędziach generują $\quad S_\sigma$ Które generują całą grupę M

Całkowicie pierwsze elementy na krawędziach są bazą $\quad M$

Stożek $\sigma^\vee$ jest generowany przez bazę $\quad M$

Stożek $\sigma \quad$ jest generowany przez bazę $\quad N$

$\mathbb{G}_m^n \simeq \mathbb{A}^n$

$\mathbb{Z}^n \langle \sigma \cap N \rangle + (\sigma \cap N) + (-\sigma \cap N) = N_\sigma \subset N$

$N/N_\sigma \simeq \mathbb{Z}^k \qquad a \in N/x \in N, a \cdot x \in N_\sigma \Rightarrow x \in N_\sigma$

$N \simeq N_\sigma \oplus N' \qquad \sigma = \sigma' \oplus \{0\}$

$\sigma^\vee$ Stożek σ rozpięty w $(N_\sigma)_{\mathbb{R}}$

$M \simeq (N_\sigma)^\vee \oplus M' \qquad \sigma^\vee = (\sigma')^\vee \oplus M'$

$S_\sigma = S_{\sigma'} \oplus M'$

$U_\sigma = U_{\sigma'} \times \mathbb{G}_m^{n-k}$

$U_{\sigma'}$ gładkie

$\downarrow$

$\operatorname{Spec} R$

$1 \Rightarrow U_{\sigma'} = \mathbb{A}_R^a$

R Pierścień $\Rightarrow \mathbb{k}$ Pierścień $\qquad \sigma = \langle T_1, \dots, T_n \rangle$

$\sigma^\vee = \bigcap T_i^\vee$

$R[S_{T_i}] = R[\mathbb{A}_R^k \times \mathbb{G}_m^{n-k}] = R[x_1, \dots, x_n]_{x_1 x_2 \dots x_n}$

Całkowicie domknięte w całe algebraicznie

$R[S_\sigma] = \bigcap R[S_{T_i}] \qquad R[S_\sigma]$ Całkowicie domknięte

---

$\sigma \subset N \simeq \mathbb{Z}^2$

$1) = \Rightarrow$ Uσ Gładkie $\qquad R[x, y]$

$\circlearrowleft \circlearrowleft R[x, y]$ t. r.a. $\qquad R[x, y]^{\mathbb{G}} = U_\sigma$

$|G| < \infty$

Całkowicie $1) \forall_{x \in} \quad x \in R$ jest generowane z jedynki $\quad x_\sigma \sim$ Inje-morfizm

$a_{x_\sigma} \tilde{x} = 1$

$a_x^k \neq 1 \quad \forall_{k \in \mathbb{N}}$

$2) \exists_{x_\sigma} \left[\begin{array}{c} \mathbb{G} \\ \mathbb{Z}[x] \end{array}\right] \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot) \qquad \underset{\mathbb{Z}}{\mathbb{G}} \xrightarrow{\exp(2\pi i k)} \mathbb{C}$

Przykład $\quad \sigma = \langle n e_1 - e_2, e_2 \rangle \subset \mathbb{N}^2 \qquad m = 3$

$\sigma^\vee = \langle e_1^* + e_2^*, e_2^* \rangle$

$R[S_\sigma] = R[X, X^2 Y, X Y^2, \dots X Y^n]$

$\cong$

$R[S_\sigma] \to R[U^{-1}, U^{-1} V, U^{-2} V, \dots, V^n]$

$x_1 + x_2 + x_3 - x_4^2$

$\cap$

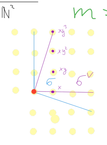
$R[U, V]$

$\mathbb{Z}_n \circlearrowleft R[U, V]$

$\in$

$+ W(U, V) = W(a_n^k U, a_n^k V)$

$R[U, V]^{\mathbb{Z}_n} = R[U^m, U^{n-1} V, \dots, V^n]$



$\sigma \subset N \simeq \mathbb{Z}^2$

$\sigma -$ Zadaje krzyżowki wachlarz nad $\quad \operatorname{Spec} R$

regularny rozpięty przez 2 wektory

$\sigma \simeq \langle e_1, n e_2 - k e_1 \rangle$

$n \geq k > 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \circlearrowleft N$

$N' \leftarrow$ Podsieć w N generowana $\quad e_1, n e_2 - k e_1$

σ' Stożek σ Przypadkowo jako stożek w $\quad N'_{\mathbb{R}}$

$N' \subseteq N$

Punktowo na $N_{\mathbb{R}} \longrightarrow M \hookrightarrow M^\vee$ Punktowo na $N_{\mathbb{R}}$

całkowito na $N' \quad \cup \qquad \cup$ całkowito na N

$S_\sigma \hookleftarrow S_\sigma = S_{\sigma'} \cap M$

$\uparrow$

$\sigma \cap \sigma'$

Punktowo w M'

Zadane na σ'

$U_{\sigma'} \longrightarrow U_\sigma$

σ' rozpięte na $N \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\mathbb{A}^2$

Zadane za pomocą $\quad \mathbb{Z}_n \circlearrowleft M' \quad M \circlearrowleft M'^{\mathbb{G}}, \quad S_{\sigma'} -$ niezmienniczo

$M' = \langle \frac{1}{n} e_1^*, e_2^* \rangle, \quad M = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$

$\mathbb{Z}_n \circlearrowleft R[M'] \quad 1 \cdot \chi^{\left(\frac{1}{n} e_1^*\right)} = \zeta_n \chi^{\left(\frac{1}{n} e_1^*\right)}$

$1 \cdot \chi^{e_2^*} = \chi^{e_2^*}$

$R[M]^{\mathbb{Z}_n} = R[M]$

$R[S_\sigma] = R[M] \cap R[S_{\sigma'}] = R[M']^{\mathbb{Z}_n} \cap R[S_{\sigma'}] =$

$= R[S_{\sigma'}]^{\mathbb{Z}_n}$