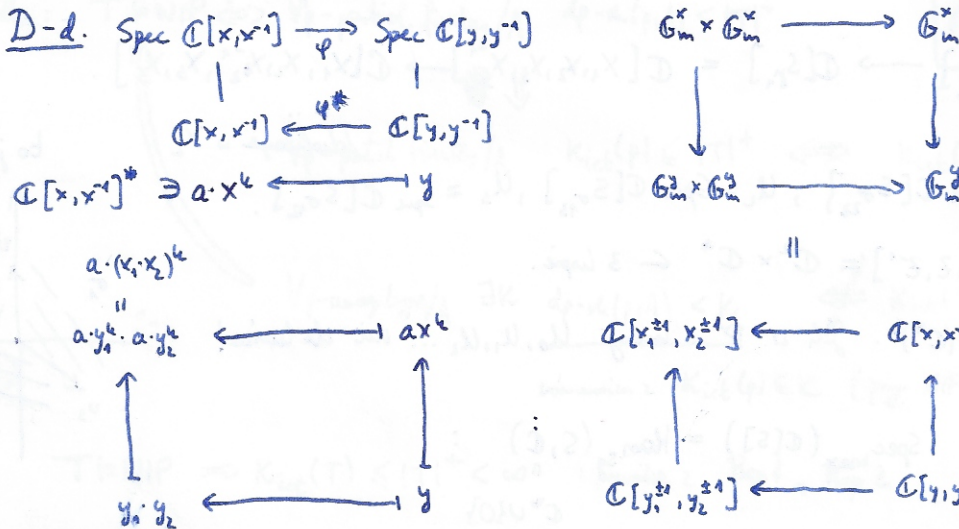


Równości torusowe

Ze pomocą 1-par. podgrup toruse i ich granic w torusowych równościach będących alternacjami cechów z dwiema toruse.

Def. 1-par. podgrupy toruse T , to homo. gp. alp. $G_m \rightarrow T$.

Fakt. Kiedy homo. grp. alp. $G_m \rightarrow G_m$ jest postaci $z \mapsto z^k$ (nad ustalonym pierścieniem)



Stąd $a^2 = a$, ale $a \neq 0$, więc $\varphi^*: z \mapsto z^k, k \in \mathbb{Z}$.

na schematach

Przypomnienie Torus $T_N = \text{Spec}_m(\mathbb{C}[S_{103}]) = \text{Spec}_m(\mathbb{C}[M]) \simeq \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$.

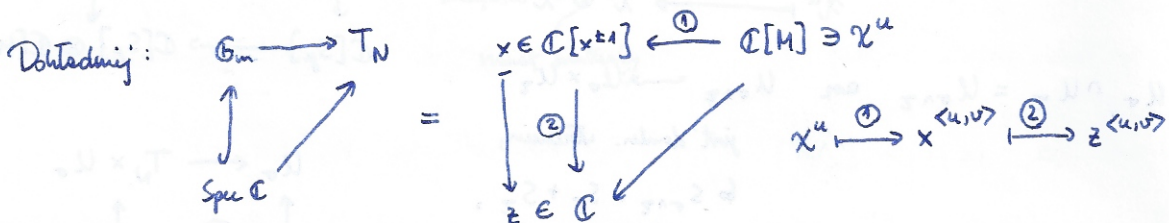
Zauważymy $\text{Hom}(G_m, T_N) = \text{Hom}(\mathbb{Z}, N) = N$, bo dla ust. bajg $e_1, \dots, e_n : N$

$T_N = (G_m)^n$, więc $\text{Hom}(G_m, (G_m)^n) = \mathbb{Z}^n$. $[(\text{Spec } \mathbb{C}[x^{\pm 1}], \text{Spec } \mathbb{C}[M]) = (\mathbb{C}[M], \mathbb{C}[x^{\pm 1}]) = (M, \mathbb{Z}) = N]$

Zatem 1-par. podgrupy $\lambda: G_m \rightarrow T_N$ odpowiadają (jedn.) wektorom $u \in N$.

$\sigma \mapsto \lambda_\sigma \in \text{Hom}(G_m, T_N)$.

Dla $z \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_\sigma(z) \in T_N = \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$ odpowiada: $\lambda_\sigma(z)(u) = \chi^u(\lambda_\sigma(z)) = z^{\langle u, \sigma \rangle}$.



Podobnie $\text{Hom}(T_N, G_m) = \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = M$, więc każdy charakter $\chi: T_N \rightarrow G_m$

jest wójg χ^u dla pewnego $u \in M$.

Fakt (i) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', N) \cong \text{Hom}_{\text{alg. gr.}}(T_{N'}, T_N)$

(ii) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, T_N, G_m) \times \text{Hom}(G_m, T_N) \rightarrow \text{Hom}(G_m, G_m)$ odpowiede $\langle \cdot, \cdot \rangle: M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$.

Podobnie warunkiemie jolo poprzednio...

W szereplnosci $N = \text{Hom}(G_m, T_N)$. Ogólnij: chęty odystac σ z not. Toramie $T_N \subset U_\sigma$.

By to zrobic bednij warunki granie typu $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ dla $v \in N$.

Przyklad. $\sigma = N_{e_1} + \dots + N_{e_n} \rightsquigarrow U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$

Dla $v = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\lambda_v(z) = (z^{m_1}, \dots, z^{m_n}) \rightsquigarrow \lambda_v(z)$ ma granicę w U_σ

Wtedy taka granica jolo postoi $(\delta_1, \dots, \delta_n)$

gdzie $\delta_i = 0$ dla $m_i > 0$ i $\delta_i = 1$ dla $m_i = 0$.

\Downarrow
wymuszenie $m_i \geq 0$ an $m_i = 0$ dla $i > k$

\Downarrow

Zauwamy, ie σ to pkt. x_σ dla τ : siamij σ

$v = (m_1, \dots, m_n) \in \sigma$.

Zadane pnie homo. sernigrp $S_\sigma = \sigma \vee \mathfrak{m} \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{C} \iff \text{Spec } \mathbb{C} \iff \text{Spec } \mathbb{C}[S_\sigma] = U_\sigma$

$$u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{jaki } u \notin \sigma^\perp, \\ 1 & \text{jaki } u \in \sigma^\perp. \end{cases}$$

Ogólnij: Dla stoiła τ w hechtam Δ def. ^{gotol} wyklonij pkt. $x_\tau \in U_\tau$.

Jaki τ jolo siamij σ , to $U_\tau \subset U_\sigma$, wie x_τ mowij obszar jolo homo. sernigrp. $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$

To jolo dobre def, bo $\tau \perp \cap \sigma^\vee$ jolo siamij σ^\vee .

$$u \mapsto \begin{cases} 0, & u \notin \tau^\perp \\ 1, & u \in \tau^\perp. \end{cases}$$

Stad dzierzymijemy pkt. $x_\tau \in X(\Delta)$ niezolnij od σ , tm. jaki $\tau < \sigma < \mu$, to

$U_\sigma \subset U_\mu$ pn. pkt. zdef. w U_σ we pkt. zdef. w U_μ .

Uwaga. Wymuszenie te pkt. sp wione, bo jaki $\sigma \not\leq \tau$, to $x_\tau \notin U_\sigma$.

Pórnij odzernij, ie te pkt. to reprezentanty orbit $T_N \curvearrowright X(\Delta)$.

Fakt 1. Jaki $v \in |\Delta|$ ane τ : stoiła w Δ t. i. σ leij w relacjony wstawa τ ,

to $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\tau$.

Fakt 2. Jaki v mi jolo wiedzij stoiła z Δ , to $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ wie ista. w $X(\Delta)$.

Dzierij tym faktem $\sigma \cap N = \{v \mid \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) \in U_\sigma\}$.

D-d (1) Rozwij U_σ dla $\tau < \sigma$ i zidentyfikujij $\lambda_v(z): M \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$u \mapsto z \langle u, v \rangle$$

Dla $u \in S_\sigma = \sigma \vee \mathfrak{m}$ mowij $\langle u, v \rangle \geq 0$ z winosij dch. stady, sdy $u \in \tau^\perp$.

Zatem granicę homomorfizmu $\chi_\sigma \subset M$ w \mathbb{C} jest tym definiowanym χ_σ .

D-d (2) Jeśli $v \notin \sigma$, to pkt. $\lambda_v(z)$ nie ma granicy w U_σ dla $z \rightarrow 0$, bo

dla ust. $u \in \sigma^v$ t.j. $\langle u, v \rangle < 0$ ($(\sigma^v)^\perp = \sigma$) mamy $\chi^u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u, v \rangle} \rightarrow \infty$
dla $z \rightarrow 0$.

Zupełność i zwartość

$X(\Delta)$: proper $\Leftrightarrow X(\Delta)^{an}$: compact.

Pytania: Jaki warunek na Δ da zwartość/zupełność?

Odpowiedzi: $X(\Delta)$: complete $\Leftrightarrow |\Delta|$ rozpinie $N_{\mathbb{R}}$.

Def. Δ jest zupełny, gdy $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$. (complete)

Ogólniej: Niech $\varphi: N' \rightarrow N$ t.j. φ odmierza $\Delta' \rightarrow \Delta \rightsquigarrow \varphi_+ : X(\Delta') \rightarrow X(\Delta)$.
homo.

Struktura. Odmierzenie $\varphi_+ : X(\Delta') \rightarrow X(\Delta)$ jest proper, wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|$.

D-d \Rightarrow : Jeśli $\sigma' \in N'$, ale nie jest w żadnym stożku $\subset \Delta'$, a $\sigma = \varphi(\sigma')$ jest w pewnym stożku $\subset \Delta$, to $\varphi_+(\lambda_{\sigma'}(z)) = \lambda_{\sigma}(z)$ ma granicę w $X(\Delta)$, ale $\lambda_{\sigma'}(z)$ nie ma zbliżonych podciągów dla $z \rightarrow 0$, co prawdy bierze proper.

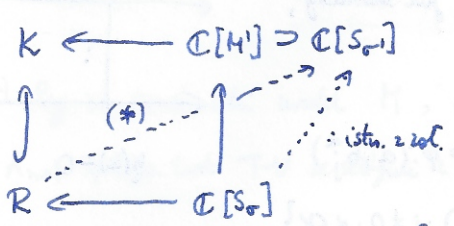
\Leftarrow : Kryterium walności zupełności: $f: X \rightarrow Y$ jest proper \Leftrightarrow

X : uniw. \Rightarrow możliwe jest, że $\text{Spec}(K) \rightarrow X$ jest nieproper

pono dla podzbioru $U \subset X$. Dla $X = X(\Delta') \supset U = T_{N'}$, $Y = X(\Delta)$, $f = \varphi_+$ zot. i $\text{Spec}(R) \rightarrow U_{\sigma}$.

Odmierzenie $\text{Spec} K \rightarrow U$ jest zadane per homo. $\alpha: M' \rightarrow K^*$ (zomp).

$\text{Spec}(K) \rightarrow X$
 $\downarrow \exists(!)$
 $\text{Spec}(R) \rightarrow Y$



$\text{Spec} R \rightarrow U_{\sigma} \subset Y$ oznacza, że $\text{ord} \circ \alpha \circ \varphi^*$ jest mniejsze na $\sigma^v \cap M$. Zatem:
 $\varphi(\text{ord} \circ \alpha) = \text{ord} \circ \alpha \circ \varphi^* \in (\sigma^v)^v = \sigma$.

Z ot. ista. σ' t.j. $\varphi(\sigma') \subset \sigma$ ani $\text{ord} \circ \alpha \in \sigma$.

To oznacza, że $\text{ord} \circ \alpha$ jest mniejsze na $(\sigma^v)^v$, więc musimy dopisać dozwolenie (*).

To kończy dowód.