Rozmaitości toryczne

Za pomocą 1-par. podgrup torusa i ich granic w torycznych rozmaitościach będziemy odtwarzać wachlarz z działania torusa.

Def. 1-par. podgrupa torusa T, to homo. gr. alg. $\mathbb{G}_m \to T$.

Fakt. Każdy homo. grup. alg. $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ jest postaci $z \mapsto z^k$ (nad ciałem bazowym)

D-d.
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,x^{-1}] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash] & \operatorname{Spec} \mathbb{C}[y,y^{-1}] \arrow[d, dash] \\ \mathbb{C}[x,x^{-1}] & \mathbb{C}[y,y^{-1}] \arrow[l, "\varphi^\#"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^x \times \mathbb{G}_m^x \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_m^x \arrow[d] \\ \mathbb{G}_m^y \times \mathbb{G}_m^y \arrow[r] & \mathbb{G}_m^y \end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}[x,x^{-1}]^* \ni a \cdot x^k \longleftarrow\!\shortmid\; y$

$$||$$

$$\begin{array}{c} a\cdot(x_1\cdot x_2)^k \\ || \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} a\cdot y_1^k \cdot a \cdot y_2^k & a x^k \arrow[l, mapsto] \\ y_1 \cdot y_2 \arrow[u, mapsto] & y \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}] & \mathbb{C}[x,x^{-1}] \arrow[l] \\ \mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 1}] \arrow[u] & \mathbb{C}[y,y^{-1}] \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Stąd $a^2 = a$, ale $a \neq 0$, więc $\varphi^\# : z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

na schematach

Przypomnienie Torus $T_N = \operatorname{Spec}_m(\mathbb{C}[S_{\{0\}}]) = \operatorname{Spec}_m(\mathbb{C}[M]) \simeq \operatorname{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$.

Zauważmy, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, T_N) = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, N) = N$, bo dla ust. bazy $e_1, \ldots, e_n : N$

$T_N \cong (\mathbb{G}_m)^n$, więc $\operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, (\mathbb{G}_m)^n) = \downarrow$. $[(\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x^{\pm 1}], \operatorname{Spec} \mathbb{C}[M]) = (\mathbb{C}[M], \mathbb{C}[x^{\pm 1}]) = (M, \mathbb{Z}) = N]$

Zatem 1-par. podgrupy $\lambda : \mathbb{G}_m \to T_N$ odpowiadają (jedn.) wektorom $v \in N$.

$v \longmapsto \lambda_v \in \operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, T_N)$.

Dla $z \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_v(z) \in T_N = \operatorname{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$ odpowiada: $\lambda_v(z)(\overset{\in M}{u}) = \chi^u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u, v \rangle}$.

Dokładniej:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r] & T_N \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}] \arrow[d, "②"] & \mathbb{C}[M] \ni \chi^u \arrow[l, "①"'] \arrow[dl] \\ z \in \mathbb{C} & \end{tikzcd} \qquad \chi^u \overset{①}{\longmapsto} x^{\langle u,v \rangle} \overset{②}{\longmapsto} z^{\langle u, v\rangle}.$$

Podobnie $\operatorname{Hom}(T_N, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Hom}(N, \mathbb{Z}) = M$, więc każdy charakter $\chi : T_N \to \mathbb{G}_m$ jest równy χ^u dla pewnego $u \in M$.

<u>Fakt</u> (i) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', N) \simeq \mathrm{Hom}_{alg.gr.}(T_{N'}, T_N)$

(ii) $\mathrm{Hom}(T_N, \mathbb{G}_m) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$ odpowiada $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Podobne rozumowanie jak poprzednio...

W szczególności $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_N)$. Ogólniej: chcemy odczytać σ z wł. włożenia $T_N \subset U_\sigma$.

By to zrobić badamy rozważać granice typu $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$ dla $v \in N$.

<u>Przykład.</u> $\sigma = \mathbb{N}e_1 + \ldots + \mathbb{N}e_k \rightsquigarrow U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$.

Dla $v = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\lambda_v(z) = (z^{m_1}, \ldots, z^{m_n}) \rightsquigarrow \lambda_v(z)$ ma granicę w U_σ

$\Updownarrow$

wszystkie m_i są ≥ 0 oraz $m_i = 0$ dla $i > k$

$\Updownarrow$

$v = (m_1, \ldots, m_n) \in \sigma$.

Wtedy taka granica jest postaci $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ gdzie $\delta_i = 0$ dla $m_i > 0$ i $\delta_i = 1$ dla $m_i = 0$.

Zauważmy, że są to pkt. x_τ dla τ : ściany σ

Zadane przez homo. semigrup $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \longrightarrow \{0,1\} \subset \mathbb{C} \iff \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[S_\sigma] = U_\sigma$.

$$u \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{jeśli } u \notin \sigma^\perp, \\ 1 & \text{jeśli } u \in \sigma^\perp. \end{cases}$$

<u>Ogólniej</u>: Dla stożka τ w wachlarzu Δ def. $\overset{\text{poota}}{}$ wyróżniony pkt. $x_\tau \in U_\tau$.

Jeśli τ jest ścianą σ, to $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$, więc x_τ możemy zobaczyć jako homo. semigp. $S_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}$

To jest dobrze zdef., bo $\tau^\perp \cap \sigma^\vee$ jest ścianą $\sigma^\vee$.
$$u \longmapsto \begin{cases} 0, & u \notin \tau^\perp \\ 1, & u \in \tau^\perp. \end{cases}$$

Stąd dostajemy pkt. $x_\tau \in X(\Delta)$ niezależny od σ, tzn. jeśli $\tau < \sigma < \mu$, to $U_\sigma \subset U_\mu$ pr. pkt. zdef. w U_σ na pkt. zdef. w U_μ.

<u>Uwaga.</u> Wszystkie te pkt. są różne, bo jeśli $\sigma \not\geq \tau$, to $x_\tau \notin U_\sigma$.

Później zobaczymy, że te pkt. to reprezentanty orbit $T_N \circlearrowright X(\Delta)$.

<u>Fakt 1.</u> Jeśli $v \in |\Delta|$ oraz τ : stożek w Δ t.że v leży w relatywnym wnętrzu τ, to $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z) = x_\tau$.

<u>Fakt 2.</u> Jeśli v nie jest w żadnym stożku z Δ, to $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$ nie istn. w $X(\Delta)$.

Dzięki tym faktom $\sigma \cap N = \{v \mid \lim_{z\to 0} \lambda_v(z) \in U_\sigma\}$.

<u>D-d (1)</u> Rozważmy U_σ dla $\tau < \sigma$ i zidentyfikujmy $\lambda_v(z) : M \longrightarrow \mathbb{C}^*$
$$u \longmapsto z^{\langle u, v\rangle}.$$

Dla $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ mamy $\langle u, v\rangle \geq 0$ z równością dokł. wtedy, gdy $u \in \tau^\perp$.

Zatem granicy homomorfizm z $S_\sigma \subset M$ w $\mathbb{C}$ jest tym definiującym x_τ.

D-d (2) Jeśli $v \notin \sigma$, to pkt. $\lambda_v(z)$ nie mają granicy w U_σ dla $z \to 0$, bo dla ust. $u \in \sigma^\vee$ t.że $\langle u, v\rangle < 0$ $((\sigma^\vee)^\vee = \sigma)$ mamy $\chi^u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u,v\rangle} \to \infty$ dla $z \to 0$.

Zupełność i zwartość

$X(\Delta)$: proper $\iff X(\Delta)^{an}$: compact.

Pytanie: jaki warunek na Δ da zwartość/zupełność?

Def. Δ jest zupełny (complete), gdy $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$.

Odpowiedź: $X(\Delta)$: zupełna $\iff |\Delta|$ rozpina $N_{\mathbb{R}}$.

Ogólniej: Niech $\varphi: N' \xrightarrow[\text{homo.}]{} N$ t.że φ odwzorowuje Δ' w $\Delta \rightsquigarrow \varphi_*: X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$.

<u>Stwierdzenie.</u> Odwzorowanie $\varphi_*: X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$ jest proper, wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|$.

<u>D-d</u> $\Rightarrow$: Jeśli $v' \in N'$, ale nie jest w żadnym stożku z Δ', a $v = \varphi(v')$ jest w pewnym stożku z Δ, to $\varphi_*(\lambda_{v'}(z)) = \lambda_v(z)$ ma granicę w $X(\Delta)$, ale $\lambda_{v'}(z)$ nie ma zbieżnych podciągów dla $z \longrightarrow 0$, co przeczy byciu proper.

$\Leftarrow$: Kryterium waluacyjne zupełności: $f: X \longrightarrow Y$ jest proper $\iff$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, R \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists(!)"] & Y \end{tikzcd}.$$

X: nierozkł. $\Longrightarrow$ można zał., że $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow X$ jest zawarte w pewnym otw. podzbiorze $U \subset X$. Dla $X = X(\Delta') \supset U = T_{N'}$, $Y = X(\Delta)$, $f = \varphi_*$ zał. że $\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow U_\sigma$.

Odwzorowanie $\mathrm{Spec}\, K \longrightarrow U$ jest zadane przez homo. $\alpha: M' \longrightarrow K^*$ (grup).

$$\begin{tikzcd} K & \mathbb{C}[M'] \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \\ R \arrow[u, hook] \arrow[urr, dashed, "(*)"] & \mathbb{C}[S_\sigma] \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ur, dotted, "\text{istn. z zał.}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Spec}\, R \longrightarrow U_\sigma \subset Y$ oznacza, że $\mathrm{ord} \circ \alpha \circ \varphi^*$ jest nieujemne na $\sigma^\vee \cap M$. Zatem:

$$\varphi(\mathrm{ord} \circ \alpha) = \mathrm{ord} \circ \alpha \circ \varphi^* \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma.$$

Z zał. istn. σ' t.że $\varphi(\sigma') \subset \sigma$ oraz $\mathrm{ord} \circ \alpha \in \sigma'$.

To ozn. że $\mathrm{ord} \circ \alpha$ jest nieujemne na $(\sigma')^\vee$, więc możemy dopełnić diagram (*).

To kończy dowód.