AM 1.2, zadania na ćwiczenia

Jarosław Buczyński

12 kwietnia 2016

Zadanie 1 (Zrobione 26.02)**.** Oblicz pochodne (w tych punktach, w których one istnieją) następujących funkcji:

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}, \qquad \arcsin(\cos x), \qquad x^{\sqrt{3}},$$

$$x^x, \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}, \qquad x^{n-1}|x|$$

(n jest stałą liczbą naturalną).

Zadanie 2 (Zrobione 26.02)**.** Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P, lub wykaż, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej, jeśli

(i) $f = \cos^2 x - 2\sin x$, $P = (\pi, 1)$,

(ii) $f = \operatorname{arctg}(2x)$, $P = (0, 0)$,

(iii) $f = \sqrt[3]{e^x - 1}$, $P = (0, 0)$.

Zadanie 3 (Zrobione 26.02)**.** Wylicz maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół przeciwprostokątnej.

Zadanie 4 (Zrobione 01.03)**.** Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji f, gdzie:

(i) $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 2]$,

(ii) $f(x) = 2ex\ln x$ dla $x \in (0, 2]$.

(iii) $f(x) = e^{\sqrt{x^2|x+1|}}$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

Zadanie 5 (Zrobione 26.02)**.** Podaj przykład funkcji różniczkowalnej i ściśle rosnącej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której pochodna znika dla wszystkich liczb całkowitych, czyli $f'(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{Z}$, lub udowodnij, że taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 6 (Zrobione 8.03)**.** Podaj przykład funkcji f, takiej, że f' istnieje na przedziale (a, b), oraz pochodna nie jest ciągła w $x_0 \in (a, b)$, lub udowodnij, że taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 7 (Zrobione 01.03)**.** Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem takim, że $f'(x_0) = 0$.

(i) Niech $h(x) = f(x)g(x)$, gdzie g jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$ oraz $f(x_0)g'(x_0) \neq 0$. Pokaż, że prosta styczna do krzywej $y = h(x)$ w punkcie $(x_0, h(x_0))$ oraz prosta styczna do krzywej $y = g(x)$ w punkcie $(x_0, g(x_0))$ przecinają się na osi x-ów.

(ii) Załóżmy, że $f(x_0) \neq 0$ i niech $h(x) = f(x)(x - x_1)$ dla pewnego $x_1 \in \mathbb{R}$. Pokaż, że prosta styczna do krzywej $y = h(x)$ w punkcie $(x_0, h(x_0))$ przecina się z osią x-ów w punkcie $(x_1, 0)$.

(iii) Załóżmy, że $f(x_0) \neq 0$ i niech $h(x) = f(x)(x - x_1)^2$ dla pewnego $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Pokaż, że prosta styczna do krzywej $y = h(x)$ w punkcie $(x_0, h(x_0))$ przecina się z osią x-ów w środku odcinka $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$.

(iv) Niech $h(x) = (ax^2 + bx + c)(x - x_1)$, gdzie $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$. Niech $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Pokaż, że prosta styczna do krzywej $y = h(x)$ w punkcie $(x_0, h(x_0))$ przecina się z osią x-ów w punkcie $(x_1, 0)$.

Zadanie 8 (Zrobione 08.03)**.** Przez $C([a, b])$ oznaczamy zbiór funkcji ciągłych $[a, b] \to \mathbb{R}$.

Niech $f, g \in C([a, b])$ będą funkcjami różniczkowalnymi w przedziale otwartym (a, b) i niech $f(a) = f(b) = 0$. Udowodnij, że w przedziale (a, b) istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $g'(x)f(x) + f'(x) = 0$.

Zadanie 9 (Zrobione 01.03)**.** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, i niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że równanie

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_n x^{\alpha_n} = 0$$

może mieć co najwyżej $n - 1$ pierwiastków w $(0, \infty)$.

Zadanie 10 (Zrobione 01.03, 04.03)**.** Ile różnych pierwiastków rzeczywistych mają równania (w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$):

a) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$, b) $e^x = ax^2$, c) $x^5 - 5x = a$.

Zadanie 11 (Zrobione 08.03-11.03)**.** Oblicz granice:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tfrac{\pi}{2}-x)\operatorname{tg}x,\quad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}x^{1000}(1,001)^{-x},\quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}x^x.$$

Zadanie 12 (Zrobione 08.03-11.03)**.** Mówimy, że funkcja gładka $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ ma co najmniej n zer wliczając krotności, jeśli istnieją parami różne punkty $x_1,x_2,\ldots,x_p$, takie, że

$$f^{(j)}(x_i)=0\quad \forall 0\le j\le n_i-1,\ 1\le i\le p,$$

gdzie $n_1+n_2+\cdots+n_p=n$. Udowodnij, że jeśli f ma co najmniej n zer wliczając krotności, to f' ma co najmniej $n-1$ zer wliczając krotności.

Zadanie 13 (Zrobione 08.03-11.03)**.** Niech $g\in C^\infty(\mathbb{R})$ i niech $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na (a,b). Załóżmy ponadto, że $f'(x)=g(f(x))$, $x\in(a,b)$. Pokaż, że $f\in C^\infty(a,b)$

Zadanie 14 (Zrobione 08.03-11.03)**.** Załóżmy, że α,β,γ są dowolnymi stałymi rzeczywistymi takimi, że α i β nie zerują się jednocześnie. Pokaż, że jeśli $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ ma drugą pochodną f'' na (a,b) oraz spełnia warunek:

$$\alpha f''(x)+\beta f'(x)+\gamma f(x)=0,\quad x\in(a,b),$$

to $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Zadanie 15 (Zrobione 15.03)**.** *(trudniejsze)* $P=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$ jest wielomianem, którego wszystkie pierwiastki mają ujemne części rzeczywiste. Pokaż, że jeśli f jest taką funkcją, że

$$\lim_{x\to\infty}P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x)=0,$$

to $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Powyżej oznaczamy:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x)=a_nf^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1f'(x)+a_0f(x).$$

Zadanie 16 (Zrobione 11.03-22.03)**.** Znajdź $f^{(n)}(x)$ dla $n=1,2,3,\ldots$, jeśli:

$$\text{a)}\ f(x)=\frac{x}{x+1},\quad \text{b)}\ f(x)=\ln(x^2-5x+6),\quad \text{c)}\ f(x)=\sin x\cos x.$$

(Punkt c zrobiony 11.03, punkty a i b pisemnie na 22.03)

Zadanie 17 (Zrobione 04.03)**.** Wykaż, że jeśli $f^{(2016)}(x)=0$ dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$, to funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego od 2016.

Zadanie 18. Naszkicuj wykres funkcji f. W tym celu znajdź przedziały monotoniczności oraz wypukłości lub wklęsłości funkcji f; jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia, asymptoty pionowe, poziome oraz ukośne, granice funkcji f w końcach przedziałów składających się na jej dziedzinę; wyjaśnij, w jakich punktach funkcja ma pochodną skończoną, w jakich nieskończoną, a w jakich w ogóle jej nie ma; znajdź granice pochodnej w końcach przedziałów składających się na jej dziedzinę. Wykres funkcji powinien uwzględniać wyniki obliczeń! Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności. Pierwiastki stopnia nieparzystego są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

$$\text{a) } f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 9x^2, \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}, \quad \text{c) } f(x) = \sin x \sin 3x.$$

(Punkt a zrobiony 15.03, punkt b pisemnie na 22.03)

Zadanie 19. Rozwiń funkcję f w szereg potęgowy o środku w punkcie p:

$$\text{a) } f = \sin^2 x, p = 0, \quad \text{b) } f = e^x, p = 1, \qquad \text{c) } f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, p = 0$$

$$\text{d) } f = \sin x, p = \pi, \quad \text{e) } f = x \sin x, p = 0.$$

(Punkt c zrobiony 15.03)

Zadanie 20. Niech $F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}$. Niech $M = \frac{1}{1000!}\frac{\mathrm{d}^{1000}F}{\mathrm{d}x^{1000}}(0)$. Wykaż, że M jest liczbą sposobów, na jakie można rozmienić 1000 złotych na monety 1, 2 i 5 złotowe.

Zadanie 21 (Zrobione 15.03)**.** Niech f będzie taką funkcją określoną w pewnym otoczeniu 0, że $f(x) = 1 + kx + o(x)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\lim_{x \to 0} f(x)^{1/x} = e^k.$$

Zadanie 22. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna. Dla $i = 0, 1, 2$ niech $M_i = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$ (powszechnie przyjęta konwencja jest taka, że $f^{(0)} = f$). Przypuśćmy, że $M_0, M_1, M_2 < \infty$. Udowodnij, że $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

Zadanie 23 (Zrobione 22.03 (domowe))**.** Niech A będzie macierzą $n \times n$. Niech $F(t) = \det(I + tA)$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Wykaż, że $F'(0) = \operatorname{Tr} A$.

Zadanie 24 (Zrobione 22.03 (domowe))**.** Dla z góry ustalonego $N \geq 0$ skonstruuj dwie funkcje wypukłe z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, których wykresy mają dokładnie N punktów wspólnych.

Zadanie 25. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną tyle razy ile nam potrzeba. Pokaż, że:

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f'''(x).$$

(trudniejsza część zadania) Załóżmy, że $f'''(x)$ istnieje. Jakie są inne minimalne założenia o różniczkowalności f, tak żeby powyższa równość zachodziła? Podaj odpowiednie kontrprzykłady, jeśli jakaś część tych minimalnych założeń nie jest spełniona.

Zadanie 26. Pokaż, że

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \quad \text{dla } x > 0.$$

Zadanie 27. Zbadaj różniczkowalność funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln 2} - \frac{1}{2^x - 1} & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Zadanie 28 (Zrobione 12.04)**.** Pokaż, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą i ograniczoną z góry, to f jest funkcją stałą. Czy funkcja wypukła i ograniczona na przedziale nieskończonym (a, ∞) lub $(-\infty, a)$ musi być stała?

Zadanie 29 (Zrobione 22.03)**.** Udowodnij, że:

$$\text{a) } \ln x < \frac{x}{e} \text{ dla } x \neq e, \quad \text{b) } \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2} \text{ dla } x > 0, x \neq 1,$$

$$\text{c) } (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha \text{ dla } 0 < \alpha < 1, x > 0, y > 0.$$

Zadanie 30 (Zrobione 12.04)**.** Znajdź ekstrema funkcji

$$\text{a) } f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}, \quad \text{b) } f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

Zadanie 31 (Zrobione 12.04)**.** Znajdź maksimum funkcji

$$f(x) = \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$$

Zadanie 32 (Zrobione 05.04)**.** Znajdź największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|1-x|}$$

Zadanie 33 (Zrobione 05.04)**.** *(trudniejsze)* Znajdź $\sup\left\{2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}} : x > 0\right\}$

Zadanie 34 (Zrobione 05-12.04)**.** Załóżmy, że funkcje f, g są jednostajnie ciągłe na (a, b) lub na $[a, \infty)$. Czy wynika stąd ciągłość jednostajna funkcji $f + g$, fg, $x \mapsto f(x)\sin x$ na (a, b) lub na $[a, \infty)$?

Zadanie 35 (Zrobione 22.03)**.** Udowodnij, że funkcja okresowa i ciągła na $\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 36. Które z funkcji $x \sin\frac{1}{x}$, $e^{-\frac{1}{x}}$, $\ln x$, $\operatorname{ctg} x$, e^x, $e^{\frac{1}{x}}$, $\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{x}$ są jednostajnie ciągłe na przedziale $(0, 1)$?

Zadanie 37. Które z funkcji $\sqrt{x}$, $\sin^2 x$, e^x, $\sin(\sin x)$, $\sin(\sqrt{x})$, $e^{\sin(x^2)}$ są jednostajnie ciągłe na przedziale $[0, \infty)$? (druga i czwarta zrobione 22.03)

Zadanie 38. Niech $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $M > 0$, że dla wszystkich $x \geq 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sup_{u>0}\{|f(x+u) - f(u)|\} \leq M(x+1).$$

Zadanie 39. Zbadaj zbieżność jednostajną na przedziale $[0, 1]$ następujących ciągów funkcyjnych:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}, && \text{b)} f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2},\\
&\text{c)} f_n(x) = x^n(1-x), && \text{d)} f_n(x) = nx^n(1-x),\\
&\text{e)} f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4, && \text{f)} f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.
\end{aligned}$$

(punkt c zrobiony 22.03)

Zadanie 40 (Zrobione 05.04)**.** Niech $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, taką, że $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. Czy f może być jednostajnie ciągła na $(0, \infty)$? (Albo podaj przykład takiego jednostajnie ciągłego f, albo udowodnij, że nie istnieje takie jednostajnie ciągłe f.)