AM 1.2, zadania na ćwiczenia

Jarosław Buczyński

12 kwietnia 2016

Zadanie 18. Naszkicuj wykres funkcji f. W tym celu znajdź przedziały monotoniczności oraz wypukłości lub wklęsłości funkcji f; jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia, asymptoty pionowe, poziome oraz ukośne, granice funkcji f w końcach przedziałów składających się na jej dziedzinę; wyjaśnij, w jakich punktach funkcja ma pochodną skończoną, w jakich nieskończoną, a w jakich w ogóle jej nie ma; znajdź granice pochodnej w końcach przedziałów składających się na jej dziedzinę. Wykres funkcji powinien uwzględniać wyniki obliczeń! Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności. Pierwiastki stopnia nieparzystego są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

$$\text{a) } f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 9x^2, \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}, \quad \text{c) } f(x) = \sin x \sin 3x.$$

(Punkt a zrobiony 15.03, punkt b pisemnie na 22.03)

Zadanie 19. Rozwiń funkcję f w szereg potęgowy o środku w punkcie p:

$$\text{a) } f = \sin^2 x, p = 0, \quad \text{b) } f = e^x, p = 1, \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, p = 0$$

$$\text{d) } f = \sin x, p = \pi, \quad \text{e) } f = x \sin x, p = 0.$$

(Punkt c zrobiony 15.03)

Zadanie 20. Niech $F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}$. Niech $M = \frac{1}{1000!}\frac{\mathrm{d}^{1000}F}{\mathrm{d}x^{1000}}(0)$. Wykaż, że M jest liczbą sposobów, na jakie można rozmienić 1000 złotych na monety 1, 2 i 5 złotowe.

Zadanie 22. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna. Dla $i = 0, 1, 2$ niech $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$ (powszechnie przyjęta konwencja jest taka, że $f^{(0)} = f$). Przypuśćmy, że $M_0, M_1, M_2 < \infty$. Udowodnij, że $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

Zadanie 25. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną tyle razy ile nam potrzeba. Pokaż, że:

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3} = f'''(x).$$

(trudniejsza część zadania) Załóżmy, że $f'''(x)$ istnieje. Jakie są inne minimalne założenia o różniczkowalności f, tak żeby powyższa równość zachodziła? Podaj odpowiednie kontrprzykłady, jeśli jakaś część tych minimalnych założeń nie jest spełniona.

Zadanie 26. Pokaż, że

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3 \quad \text{dla } x>0.$$

Zadanie 27. Zbadaj różniczkowalność funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln 2} - \frac{1}{2^x-1} & \text{dla } x\neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x=0. \end{cases}$$

Zadanie 36. Które z funkcji $x\sin\frac{1}{x}$, $e^{-\frac{1}{x}}$, $\ln x$, $\operatorname{ctg} x$, e^x, $e^{\frac{1}{x}}$, $\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{x}$ są jednostajnie ciągłe na przedziale $(0,1)$?

Zadanie 37. Które z funkcji $\sqrt{x}$, $\sin^2 x$, e^x, $\sin(\sin x)$, $\sin(\sqrt{x})$, $e^{\sin(x^2)}$ są jednostajnie ciągłe na przedziale $[0,\infty)$? (druga i czwarta zrobione 22.03)

Zadanie 38. Niech $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $M>0$, że dla wszystkich $x\geq 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sup_{u>0}\{|f(x+u)-f(u)|\} \leq M(x+1).$$

Zadanie 39. Zbadaj zbieżność jednostajną na przedziale $[0,1]$ następujących ciągów funkcyjnych:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2}, & \text{b)} f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}, \\ \text{c)} f_n(x) = x^n(1-x), & \text{d)} f_n(x) = nx^n(1-x), \\ \text{e)} f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4, & \text{f)} f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}. \end{array}$$

(punkt c zrobiony 22.03)