Zadania

22 stycznia 2016

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \dots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \dots, n\}$, taki, że

$$\left|\sum_{k \in B} z_k\right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Wskazówka. Zadanie pochodzi ze zbioru Biler-Witkowski, zadanie nr 1.86. Wskazówka/odpowiedź tam zamieszczona brzmi: "Ustawić liczby

$$z_1, \dots, z_n, -(z_1 + \cdots + z_n)$$

w ciąg o rosnących argumentach. Porównać obwód i średnicę wyznaczonego przez nie wielokąta."

Zadanie 2. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Wskazówka. Zadanie 2.92, Biler-Witkowski. Odpowiedź: $a_n = Pb_n + Q + o(1)$, gdzie P i Q są stałe, a $o(1)$ oznacza pewien ciąg zbieżny do 0.

Zadanie 3. Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Pokaż, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

jest zbieżny, gdy zachodzi jeden z przypadków:

- $\alpha > \frac{1}{2}$;
- $\alpha > 0$ oraz szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Wskazówka. Zadanie pochodzi ze zbioru Biler-Witkowski, zadanie nr 2.66. Wskazówka tam zamieszczona zaczyna się od: "Można pokazać, że

$$a_n = 1 + 2 \sum \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!},$$

gdzie sumowanie przebiega po r, s, t naturalnych takich, że $2^r 3^s 6^t \leq n$." Dodatkowo, można zauważyć, jaki związek ma $\frac{12}{\log 432}$ z liczbami 2, 3 i 6:

$$\frac{12}{\log 432} = \frac{\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{3}(3-1) + \frac{1}{6}(6-1)}{\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{6}\log 6}$$

Zobacz też rozwiązanie tu: `https://www.jstor.org/stable/2690239?seq=2#page_scan_tab_contents` strony 7-8 (dostęp z Wydziału).

Zadanie 5. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ obliczyć:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - z e^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 6. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Wskazówka. Przedstaw ϕ_α jako złożenie $\mathbb{C} \overset{\psi_1}{\to} \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^2 \overset{\psi_2}{\to} \mathbb{C}^2$, gdzie pierwsze odwzorowanie przekształca

$$z \mapsto \psi_1(z) = (e^{\Re z}, e^{\Re(\alpha z)}, \Im z \bmod 2\pi, \Im(\alpha z) \bmod 2\pi)$$

a drugie

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 e^{iy_1}, x_2 e^{iy_2}).$$

Pokaż, że jest mocna zależność między $\psi_2(\overline{A})$ a $\overline{\psi_2(A)}$.

Zadanie 7 (o wielomianach symetrycznych)**. Wstęp.** Niech $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ oznacza zbiór wielomianów wielu zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Czyli $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ to (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ składająca się z elementów:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{x}^{D_j},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{K}$, $D_j = (d_{j1}, \ldots, d_{jn}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ oraz $\mathbf{x}^{D_j} = x_1^{d_{j1}} \cdot x_2^{d_{j2}} \cdots x_n^{d_{jn}}$. Stopień wielomianu f jak wyżej to $\deg f := \max\{\sum D_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Wielomiany można mnożyć i składać, np., jeśli $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, to $f(g_1, \ldots, g_n)$ też jest elementem $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *Permutacja* zbioru $\{1, \ldots, n\}$ to bijekcja $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jest *symetryczny*, jeśli dla dowolnej permutacji σ mamy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Polecenie 1. Pokaż, że jeśli $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, taki, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

gdzie S_k jest k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym:

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\}\,, \\ \#I = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Polecenie 2. Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Znajdź odwzorowanie ciągłe "na" $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, takie, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mamy:

$$\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \left\{(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \text{ jest permutacją } \{1, \ldots, n\}\right\},$$

gdzie $\mathbf{y} := \phi(\mathbf{x})$.

Zadanie 8 (zaproponowane przez pana Wojciecha Zwolińskiego)**.** Znajdź wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, takie, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zadanie 9. Odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłe, bijekcją, oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Pokaż, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ jest homeomorfizmem.

Wskazówka. Korzystaj uparcie z kryterium zwartości: podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony, wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone. Poza tym, pokaż (lub raczej zauważ przy wykorzystaniu powyższego), że obraz (przy funkcji ciągłej) zbioru domkniętego i ograniczonego, jest domknięty i ograniczony.

Zadanie 10. Jeśli $U \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in U$, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, to *różniczką* funkcji f w x_0 nazywamy następującą granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}.$$

Jeśli różniczka w x_0 istnieje, to f jest *różniczkowalna* w x_0. Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie?

Zadanie 11 (27 linii na kubice)**.** Niech S będzie zespoloną powierzchnią stopnia 3 w $\mathbb{C}^3$ (kubiką). To znaczy wybieramy wielomian $F(x, y, z)$ stopnia 3 o współczynnikach zespolonych w trzech zmiennych, następnie definiujemy:

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Należy założyć, że "F jest wystarczająco ogólne". Intucyjnie, jeśli np weźmiemy $F = x^3$, lub $F = (ax + by + cz)^2(a'x + b'y + c'z)$, to S jest "mało ciekawe". Formalnie, powiedzenie, że "własność $P(F)$ zachodzi dla wystarczająco ogólnego wielomianu F stopnia ≤ 3" oznacza, że w zbiorze wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3 (jest to po prostu $\mathbb{C}^{20}$), istnieje otwarty gęsty podzbiór U, taki, że $P(F)$ zachodzi dla każdego $F \in U$.

Pokaż, że wystarczająco ogólna kubika zawiera dokładnie 27 prostych zespolonych, czyli obrazów różnowartościowego odwzorowania afinicznego $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Wariant być może ciut prostszy (przynajmiej łatwiej sobie wyobrazić): Weźmy $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, gdzie $w = ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i (a, b, c, d) są wystarczająco ogólne. Pokaż, że

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}$$

zawiera dokładnie 27 prostych rzeczywistych.

Wskazówka. Referencje: 27 prostych na kubice jest to klasyczny wynik z XIX-stego wieku Salmona i Cayleya. Kubika opisana równaniem powyżej nazywa się kubiką Clebscha i charakteryzuje się dużą grupą symetrii (rola x, y, z, w i $-(x + y + z + w)$ jest taka sama i można je ze sobą zamieniać).

UAG Miles Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, `https://homepages.warwick.ac.uk/staff/Miles.Reid/MA4A5/UAG.pdf`, lub kopia papierowa jest w bibliotece (Cambridge University Press)

Lazarus Simon Lazarus, Basic algebraic geometry and the 27 lines on a cubic surface, `http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Lazarus.pdf`

- historia jest opisana tutaj: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Cubic_surfaces.html`

Clebsch A. Clebsch, `http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01442599`

Dla kubiki Clebscha, czyli $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, proste są opisane przez:

- $x + y = z + w = 0$ oraz permutacje $(x, y, z, w, -(x + y + z + w))$, np. $x - (x + y + z + w) = y + z = 0$ (15 prostych);
- Niech ξ będzie prymitywnym pierwiastkiem piątego stopnia z 1. Weźmy punkt v o współrzędnych $x = 1$, $y = \xi$, $z = \xi^2$, $w = \xi^3$, $-(x + y + z + w) = \xi^4$ oraz punkt sprzężony $\bar{v}$. Niech $L_{\mathbb{C}}$ będzie prostą zespoloną przechodzącą przez v i $\bar{v}$. Wtedy $L_{\mathbb{R}} := L_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^3$ jest prostą rzeczywistą zawartą w S. Permutując $(x, y, z, w, -(x + y + z + w))$ dostajemy 12 różnych prostych.

Dla ogólnej (dokładniej, dla gładkiej (ang. *smooth*) lub raczej nieosobliwej, (ang. *nonsingular*)) kubiki trzeba się bardziej napracować, żeby zobaczyć istnienie 27 linii. W szczególności nie jest oczywiste pokazanie, że w ogóle istnieje jakakolwiek linia na kubice. Zobacz np. dyskusja w [UAG, Prop 7.2, pages 110–112].

Jak już wiemy, że istnieje jedna prosta, pokazujemy jak mogą się układać proste na kubice, np. przez dowolny ustalony punkt przechodzą co najwyżej trzy proste; każda linia przecina dokładnie 10 innych prostych; istnieje rozłączna para prostych. Korzystając z tych układów pokazujemy tezę. Cała argumentacja nie jest banalna, ale nie zawiera bardzo trudnych kroków. Pojęciowo, wygodniej jest patrzeć na powierzchnię S jako podzbiór trójwymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{CP}^3$ oraz F jest wielomianem jednorodnym w czterech zmiennych. Wtedy jedyne założenie jakie potrzebujemy, to nieosobliwość, nie musimy się martwić, że któreś proste znajdą się w nieskończoności. Ponadto, warto wiedzieć co to jest przestrzeń styczna do powierzchi S w punktcie $v \in S$. Jest to płaszczyzna w przestrzeni rzutowej opisana równaniem

$$T_vS = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(v) \cdot x + \frac{\partial F}{\partial y}(v) \cdot y + \frac{\partial F}{\partial z}(v) \cdot z + \frac{\partial F}{\partial w}(v) \cdot w = 0 \right\}.$$

(powierzchnia jest nieosobliwa, jeśli dla każdego $v \in S$ powyższe równanie jest niezerowe, oczywiście zakładamy $v \neq 0$). Szczegóły są zawarte na przykład w [UAG, Rozdział 7], lub w [Lazarus, Rozdział 3].

Elementarne podejście jest dosyć żmudne, ale za to jest dostępne dla zainteresowanych studentów początkowych etapów studiów. Zaawansowane podejście wymaga znajomości geometrii algebraicznej oraz podstaw teorii (ko)homologii (między innymi teorii (-1)-krzywych i teorii przecięć na zwartych gładkich powierzchniach zespolonych). Wtedy organiczenie górne na liczbę prostych bierze się z obliczeń w 7 wymiarowej kracie $H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^7$ drugich kohomologii S. Krata ta reprezentuje klasy równoważności kombinacji $\mathbb{Z}$-liniowych krzywych zepolonych na S. Mamy naturalne odwzorowanie dwuliniowe $H^2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, które z grubsza opisuje w ilu punktach przecinają się pary krzywych. Ograniczenie dolne (konstrukcja 27 prostych) wynika z opisu kubiki jako rozdmuchanie $\mathbb{CP}^2$ w 6 punktach: 6 prostych to rozdmuchane punkty, 15 prostych to przeciwobrazy prostych w $\mathbb{CP}^2$ przechodzących przez 2 z 6ściu puntków, a kolejne 6 prostych to przeciw obrazy stożkowych przechodzących przez dowolne 5 z sześciu punktów. Pokazanie, że każda z tych krzywych jest prostą znowu sprowadza się do łatwego obliczenia kohomologicznego.

Zadanie 12. Używając rozkładów funkcji wymiernych na elementarne podaj eleganckie warunki przy których jesteśmy w stanie policzyć

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

Sumowanie zaczynamy od dostacznie dużego n_0. Zakładamy, że $\frac{p(x)}{q(x)}$ jest funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$.

Zadanie 13. Załóżmy, że mamy ciągi $A = (a_n), B = (b_n)$ należą do l_p. Czy

$$\lim_{q \to \infty} \rho_{l_q}(A, B) = \rho_{l_\infty}(A, B)?$$

Zadanie 14 (Zbiory otwarte w l_p)**.** Ustalmy $p, p' \in [1, \infty]$ takie, że $p \leq p'$.

(i) Załóżmy, że $U \subset l_p$ jest zbiorem otwartym. Czy istnieje otwarty podzbiór $U' \subset l_{p'}$, taki, że $U = U' \cap l_p$.

(ii) Załóżmy, że $U' \subset l_{p'}$ jest zbiorem otwartym. Czy $U = U' \cap l_p$ jest otwarty w l_p?

Zadanie 15. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10},$$

gdzie $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ jest zbiorem dodatnich rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$.

Wskazówka. Zadanie 3.125 (Biler-Witkowski); zobacz `http://www.jstor.org/stable/2322346` (jest tam kilka istotnie różnych rozwiązań i dyskusja o podobnych problemach).

Zadanie 16. Niech a_n będzie takim malejącym ciągiem o wyrazach nieujemnych, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest rozbieżny. Niech ponadto

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln n}\right\}, n > 1.$$

Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ też jest rozbieżny.

Zadanie 17. Załóżmy, że f jest taką dodatnią funkcją malejącą do zera w przedziale $(0, +\infty)$, że $nf(n)$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do $+\infty$. Niech S będzie sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$. Znajdź takie przestawienie wyrazów tego szeregu, aby jego suma była równa $S + l$, gdzie l jest dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą.

Dla przykładu, znajdź takie przestawienie wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, tak aby suma powiększyła sie o 1.

Zadanie 18. Udowodnij, że wielomiany P_n zdefinionwane rekurencyjnie wzorami $P_0 = 1$, $P_1 = x + 1$, $P_{n+1} = P_n + xP_{n-1}$ (dla $n \geq 1$) mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 19. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ i spełnia warunek $f(0) = f(n)$. Pokaż, że równanie $f(x) = f(y)$ ma co najmniej n różnych rozwiązań takich, że $x - y$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 20. Funkcja $f\colon K \to K$ jest ciągłym odwzorowaniem zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}$ w siebie. Punkt $x_0 \in K$ ma następującą własność: każdy punkt skupienia ciągu iteracji $f^n(x_0)$ jest punktem stałym f. Pokaż, że ciąg $f^n(x_0)$ jest zbieżny.

Podaj przykład, że dla zwartych podzbiorów płaszczyzny powyższy fakt nie jest prawdziwy.

Zadanie 21. Dla ograniczonej funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiujemy funkcję:

$$Sf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\sup\left\{|f(y) - f(z)| \mid |x - z| < \epsilon, |x - y| < \epsilon\right\}\right).$$

Udowodnij, że:

(i) Sf jest półciągła z góry, czyli dla każdego $x_0 \in [0,1]$ mamy $\limsup_{x\to x_0} Sf(x) \leq x_0$.

(ii) f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $Sf(x_0) = 0$,

(iii) $S^3 = S^2$.

[Zostało: (i) oraz (iii).]

Zadanie 22. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

jest pochodną pewnej funkcji F?

Wskazówka.

$$F(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}) - 2\int_0^x t\cos(\frac{1}{t}\mathrm{d}t).$$

Zadanie 23. Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ i $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?

Wskazówka.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n!x)}{(n!)^2},$$

gdzie g jest funkcją okresową o okresie 1 równą $x(1-4x^2)$ dla $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Zadanie 24 (Półciągłość)**.** Definiujemy półciągłość funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$ (X może być podzbiorem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^n$, lub przestrzenią metryczną, lub ew. topologiczną, jednak w tym ostatnim przypadku trzeba być ostrożnym z definicjami):

- f jest półciągła z góry w punkcie x_0, jeśli $\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.
- f jest półciągła z dołu w punkcie x_0, jeśli $\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

[Zrobione] Pokaż, że f jest półciągła z góry (w każdym punkcie) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ jest otwarty dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$. (I analogicznie, dla ("$\geq$"; domknięty), oraz dla półciągłej z dołu).

[Zostało tylko dla rzędu macierzy] Pokaż odpowiednią półciągłość: rzędu macierzy, (więc też wymiaru jądra i obrazu ciągłej rodziny odwzorowań liniowych), liczby pierwiastków wielomianu (bez krotności), funkcji charakterystycznych zbiorów otwartych i domkniętych.

Sformułuj i pokaż twierdzenie Bolzano-Weierstrassa dla funkcji półciągłych na zbiorach zwartych (przyjmowanie wartości odpowiednio maksymalnych i minimalnych).