Zadania

4 grudnia 2015

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \ldots, n\}$, taki, że

$$\left|\sum_{k\in B} z_k\right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Zadanie 2. Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 3. Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Zadanie 5. Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - ze^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 6. Dla $\alpha \in \mathbb{C}$ określmy funkcję $\phi_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ wzorem $\phi_\alpha(z) = (e^z, e^{\alpha z})$. Opisz domknięcie obrazu ϕ_α w zależności od parametru α:

- dla $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$,
- dla $\alpha \in \pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,
- dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zadanie 7 (lokalnie jednostajna zbieżność)**.** Niech A i B będą podzbiorami $\mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg funkcji $f_n\colon A \to B$ jest *lokalnie jednostajnie zbieżny* do funkcji $f\colon A \to B$, jeśli każdy punkt $x \in A$ ma otoczenie otwarte $U_x = (x - \delta, x + \delta) \cap A$ (dla pewnego $\delta > 0$), takie, że $f_n|_{U_x} \rightrightarrows f_{U_x}$.

(i) (zadanie wyłącznie domowe) Kontempluj przez co najmniej 10 minut definicje lokalnie jednostajnej zbieżności i jednostajnej zbieżności. W szczególności:

  - Zrozum, że jednostajna zbieżność implikuje lokalnie jednostajną zbieżność.
  - Zrozum, że A, B w definicji jednostajnej zbieżności może byc dowolnym zbiorem, na którym mamy sensowne pojęcie odległości dwóch punktów (tzw przestrzenią metryczną). Jeśli nie chcesz wnikać w przestrzenie metryczne, to rozważaj wyłącznie podzbiory $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (niżej też).
  - Zrozum, że B w definicji lokalnie jednostajnej zbieżności może byc dowolną przestrzenią metryczną.
  - Zmodyfikuj definicję lokalnie jednostajnej zbieżności, aby A mogło być dowolną przestrzenią metryczną.

(ii) Pokaż, że granica lokalnie jednostajna funkcji ciągłych jest ciągła.

(iii) Udowodnij, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem domkniętym, ograniczonym (*ogólniej: zwartym*), to lokalnie jednostajna zbieżność implikuje jednostajną zbieżność.

(iv) Podaj przykład ciągu funkcji ciągłych, który jest lokalnie jednostajnie zbieżny, ale nie jest jednostajnie zbieżny.

Zadanie 8 (o wielomianach symetrycznych)**. Wstęp.** Niech $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ oznacza zbiór wielomianów wielu zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Czyli $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ to (nieskończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ składająca się z elementów:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{x}^{D_j},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{K}$, $D_j = (d_{j1}, \ldots, d_{jn}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ oraz $\mathbf{x}^{D_j} = x_1^{d_{j1}} \cdot x_2^{d_{j2}} \cdots x_n^{d_{jn}}$. Stopień wielomianu f jak wyżej to $\deg f := \max\{\sum D_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Wielomiany można mnożyć i składać, np., jeśli $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, to $f(g_1, \ldots, g_n)$ też jest elementem $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. *Permutacja* zbioru $\{1, \ldots, n\}$ to bijekcja $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jest *symetryczny*, jeśli dla dowolnej permutacji σ mamy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Polecenie 1. Pokaż, że jeśli $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, taki, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

gdzie S_k jest k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym:

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\}, \\ \#I = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Polecenie 2. Załóżmy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Znajdź odwzorowanie ciągłe "na" $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, takie, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mamy:

$$\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \left\{(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \text{ jest permutacją } \{1, \ldots, n\}\right\},$$

gdzie $\mathbf{y} := \phi(\mathbf{x})$.

Zadanie 9 (zaproponowane przez pana Wojciecha Zwolińskiego)**.** Znajdź wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, takie, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zadanie 10. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem. Odwzorowanie $\phi\colon A \to \mathbb{R}^m$ jest *ciągłe* (w sensie ℓ_p), jeśli

$$\forall_{x \in A} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in A}\ \rho_{\ell_p}(x, y) \leq \delta \Longrightarrow \rho_{\ell_p}(\phi(x), \phi(y)) \leq \epsilon.$$

Pokaż, że ϕ jest ciągłe, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$ przeciwobraz $\phi^{-1}(U) = V \cap A$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty. (Mówimy, że przeciwobraz jest otwarty w A.) W szczególności, ciągłość nie zależy od wyboru p.

Zadanie 11. Pokaż, że $U \subset \mathbb{R}$ jest otwarty, wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najwyżej przeliczalną sumą rozłącznych przedziałów i półprostych:

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i),$$

gdzie $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oraz $\cdots < a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} < \cdots$ (dopuszczamy $a_0 = -\infty$ oraz $b_N = +\infty$).

Zadanie 12. Odwzorowanie $\phi\colon A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli jest ciągłe, bijekcją, oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Pokaż, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ jest homeomorfizmem.

Zadanie 13. Jeśli $U \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in U$, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, to *różniczką* funkcji f w x_0 nazywamy następującą granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Jeśli różniczka w x_0 istnieje, to f jest *różniczkowalna* w x_0. Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie?

Oznaczamy $f^{(i+1)} := (f^{(i)})'$ (o ile istnieje). Ewentualnie $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Zadanie 14 (27 linii na kubice)**.** Niech S będzie zespoloną powierzchnią stopnia 3 w $\mathbb{C}^3$ (kubiką). To znaczy wybieramy wielomian $F(x, y, z)$ stopnia 3 o współczynnikach zespolonych w trzech zmiennych, następnie definiujemy:

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Należy założyć, że "F jest wystarczająco ogólne". Intucyjnie, jeśli np weźmiemy $F = x^3$, lub $F = (ax + by + cz)^2(a'x + b'y + c'z)$, to S jest "mało ciekawe". Formalnie, powiedzenie, że "własność $P(F)$ zachodzi dla wystarczająco ogólnego wielomianu F stopnia ≤ 3" oznacza, że w zbiorze wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3 (jest to po prostu $\mathbb{C}^{20}$), istnieje otwarty gęsty podzbiór U, taki, że $P(F)$ zachodzi dla każdego $F \in U$.

Pokaż, że wystarczająco ogólna kubika zawiera dokładnie 27 prostych zespolonych, czyli obrazów różnowartościowego odwzorowania liniowego $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Wariant być może ciut prostszy (przynajmiej łatwiej sobie wyobrazić): Weźmy $F = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$, gdzie $w = ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, np. $w = 1$, lub $w = 1 - (x + y + z)$. Pokaż, że

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\big\}$$

zawiera dokładnie 27 prostych rzeczywistych.

Zasadnicze Twierdzenie Algebry:

Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Dowód zasadniczego Twiedzenia Algebry nie jest banalny. Potrzebne jest użycie aksjomatu ciągłości dla $\mathbb{R}$. W trakcie studiów poznacie co najmniej kilka istotnie różnych dowodów.

Wnioski:

1) Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma rozkład na skończony iloczyn czynników liniowych.

2) Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach w $\mathbb{R}$ ma rozkład na skończony iloczyn czynników liniowych i kwadratowych (o współczynnikach w $\mathbb{R}$), gdzie czynniki kwadratowe nie mają pierwiastków rzeczywistych.

(W wolnej chwili można sprawdzić, czy na pewno wiemy jak się dowodzi wnioski.)

Zadanie 15. Zakładając Zasadnicze Twierdzenie Algebry pokaż, że:

(i) dowolna funkcja wymierna $\frac{p(x)}{q(x)}$ o współczynnikach w $\mathbb{C}$ ma rozkład na skończoną sumę:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = w(x) + \frac{a_1}{(b_1 x + c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{a_k}{(b_k x + c_k)^{n_k}},$$

gdzie $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$, a $w(x)$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych.

(ii) dowolna funkcja wymierna $\frac{p(x)}{q(x)}$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$ ma rozkład na skończoną sumę:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = w(x) + \frac{a_1}{(b_1 x + c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{a_k}{(b_k x + c_k)^{n_k}} + \frac{d_1 x + e_1}{(f_1 x^2 + g_1 x + h_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{d_l x + e_l}{(f_l x^2 + g_l x + h_l)^{m_l}}$$

gdzie $a_i, \dots, h_i \in \mathbb{R}$, $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ oraz $f_i x^2 + g_i x + h_i$ nie mają pierwiastków w $\mathbb{R}$, a $w(x)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych.

Zadanie 16. Używając rozkładów z Zadania 15 podaj eleganckie warunki przy których jesteśmy w stanie policzyć

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

Sumowanie zaczynamy od dostacznie dużego n_0. Zakładamy, że $\frac{p(x)}{q(x)}$ jest funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$.

Zadanie 17 (Całkowanie funkcji wymiernych)**.** *Funkcja pierwotna* funkcji $f(x)$, to taka funkcja $F(x)$, że $F' = f$.

(i) Znajdź funkcję pierwotną $\frac{a}{bx+c}$, dla $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(ii) Znajdź funkcję pierwotną $\frac{dx+e}{fx^2+gx+h}$ dla $d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$, takich, że $fx^2 + gx + h$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

(iii) Używając rozkładów z Zadania 15 znajdź funkcję pierwotną dowolnej funkcji wymiernej o współczynnikach rzeczywistych.

Zadanie 18. Definiujemy przestrzeń l_p jako zbiór tych ciągów (a_n), takich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty,$$

oraz l_∞ jako przestrzeń wszystkich ciągów ograniczonych. Pokaż, że dla $p, p' \in [1, \infty]$ mamy $l_p \subset l_{p'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \leq p'$.

Zadanie 19. Załóżmy, że mamy ciągi $A = (a_n), B = (b_n)$ należą do l_p. Czy

$$\lim_{q \to \infty} \rho_{l_q}(A, B) = \rho_{l_\infty}(A, B)?$$

Zadanie 20 (Zbiory otwarte w l_p)**.** Ustalmy $p, p' \in [1, \infty]$ takie, że $p \leq p'$.

(i) Załóżmy, że $U \subset l_p$ jest zbiorem otwartym. Czy istnieje otwarty podzbiór $U' \subset l_{p'}$, taki, że $U = U' \cap l_p$.

(ii) Załóżmy, że $U' \subset l_{p'}$ jest zbiorem otwartym. Czy $U = U' \cap l_p$ jest otwarty w l_p?

Zadanie 21. Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Udowodnić, że każda izometria $\phi\colon A \to A$ ma punkt stały (to znaczy taki, że $\phi(x) = x$), lub podać przykład izometrii, która takiego punktu nie ma.

Zadanie 22. Rozstrzygnij, czy następujące szeregi są zbieżne:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16+(-2)^n}{n2^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}\log n}{n}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

Zadanie 23. Rozstrzygnij, dla jakich $q \in (0, \infty)$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n)^q}$$

jest zbieżny.

Zadanie 24. Oznaczmy przez P_k zbiór $\{0, k, 2k, \dots\}$. Oblicz

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{n\in P_k} \frac{x^n}{n!}.$$

Zadanie 25. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10},$$

gdzie $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ jest zbiorem dodatnich rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$.