Zadania

30 października 2015

Zadanie 1 (zrobione 30.10). $S \subset \mathbb{Z}$ jest podzbiorem o dopełnieniu skończonym. Pokaż, że istnieją dwa nieskończone zbiory $X, Y \subset \mathbb{Z}$, takie że

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} = S$$

oraz każdy element $s \in S$ przedstawia się na dokładnie jeden sposób w postaci $x + y$, gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$.

Zadanie 2 (zrobione 30.10). Znajdź ciąg liczb rzeczywistych a_n taki, że dla $|x| < 1$

$$\log(1 + x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Zadanie 3 (zrobione 30.10). Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

jest liczbą niewymierną.

Zadanie 4 (zrobione 3.11). Niech S^2 będzie sferą Riemanna, czyli $S^2 = U_0 \cup U_\infty$, gdzie $U_0 \simeq \mathbb{C}$, $U_\infty \simeq \mathbb{C}$ oraz $U_0 \cap U_\infty \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $z \in U_0 \setminus \{0\}$ odpowiada $\frac{1}{z} \in U_\infty \setminus \{0\}$. Punkty ze zbioru U_0 odpowiadające liczbie $z \in \mathbb{C}$ oznaczamy po prostu przez z. Punkty ze zbioru U_∞ odpowiadające liczbie $w \in \mathbb{C}$ oznaczamy $\frac{1}{w}$, jeśli $w \neq 0$ oraz ∞, jeśli $w = 0$.

(i) Pokazać, że funkcja wymierna $z \mapsto f(z) = \frac{a_n z^n + \cdots + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_0}$ definiuje odwzorowanie ciągłe $S^2 \to S^2$. Co to jest $f(\infty)$, $f^{-1}(\infty)$?

(ii) Dla jakich n, m, a_i, b_j funkcja wymierna f jest odwracalna?

(iii) Pokazać, że nie można rozszerzyć odwzorowania $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$ do ciągłego odwzorowania $S^2 \to S^2$.

Zadanie 5 (zrobione 30.10). Policzyć wszystkie wartości i^i, gdzie $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, natomiast dla $x, y \in \mathbb{C}$, definiujemy $x^y = e^{y \log x} = \{e^{yz} \in \mathbb{C} \mid e^z = x\}$.

Zadanie 6 (zrobione 30.10). (i) Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(x + y) = f(x)f(y)$. Pokazać, że istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = a^x$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. (Wystarczy zakładać, że f jest ciągła w 0.)

(ii) Niech $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(z + w) = f(z)f(w)$. Czy $f(z) = e^z$?

(iii) Jeśli w poprzednim punkcie odpowiedź jest twierdząca, to przedyskutuj, które założenia są nie potrzebne, a które można osłabić. Jeśli w poprzednim punkcie odpowiedź jest negatywna, to przedyskutuj, przy jakich dodatkowych założeniach można pokazać, że $f(z) = e^z$.

Zadanie 7 (zrobione 3.11). Udowodnij, że dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$ równanie

$$e^z = \frac{a + z}{a - z}$$

Nie ma rozwiązań w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Zadanie 8 (zrobione 3.11). Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}.$$

Zadania bieżące

Zadanie 9 (do domu na 3.11). Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ istnieje zbiór $B \subset \{1, \ldots, n\}$, taki, że

$$\left|\sum_{k \in B} z_k\right| \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Zadanie 10 (zrobione 30.10). Udowodnij, że istnieje kwadrat, w którym można umieścić ciąg parami rozłącznych kwadratów o bokach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Zadanie 11 (zrobione 3.11). Obliczyć granicę:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}}$$

Zadanie 12 (do domu na 13.11)**.** Jakie warunki muszą spełniać ciągi a_n i b_n, aby istniały stałe A i B, $AB \neq 0$ takie, że ciąg $Aa_n + Bb_n$ jest zbieżny?

Zadanie 13 (do domu na 6.11)**.** Wyznaczyć granice (o ile istnieją) ciągów zadanych wzorami:

$$b_{n+1} = \int_0^1 \min(x, a_n)\mathrm{d}x,$$
$$a_{n+1} = \int_0^1 \max(x, b_n)\mathrm{d}x$$

w zależności od $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 14 (do domu na 13.11)**.** Niech a_n będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki:

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 15 (do domu na 6.11)**.** Pokaż, że jeśli $a_0 = 1$ i

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\log 432}$$

Zadanie 16 (**zrobione 6.11**)**.** Dla jakich wartości a_1 ciąg określony rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

jest zbieżny?

Zadanie 17 (**zrobione 10.11**)**.** Czy z warunku $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ wynika, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne, bądź rozbieżne?

Zadanie 18 (do domu na 10.11)**.** Dla $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$, wartości a_1 obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin e^{2\pi i \frac{k}{n}}}{1 - z e^{-2\pi i \frac{k}{n}}}.$$

Zadanie 19 (**zrobione 10.11**)**.** Obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} (\sqrt{n+1} \sin^n x \cdot \cos x) \right)$$

Zadanie 20 (**zrobione 10.11**)**.** Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 21 (do domu na 13.11)**.** Ciąg a_n określamy wzorem:

$$a_1 = x, \qquad a_{n+1} = \log \frac{e^{a_n} - 1}{a_n}.$$

Pokazać, że

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \cdots = e^x.$$

Zadanie 22 (do domu na 13.11)**.** Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\Sigma = \left\{ a = \{a_n\} \mid \text{szereg} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \right\}.$$

Skonstruuj ciąg $b \notin \Sigma$ taki, że

$$\inf_{a\in\Sigma} \sup_n \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$$

oraz ciąg $a \in \Sigma$ taki, że

$$\inf_{b\notin\Sigma} \sup_n \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$$

Zadanie 23 (**zrobione 10.11**)**.** Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

Zadanie 24 (do domu na 13.11)**.** Ciąg u_n liczb dodatnich jest ściśle rosnący, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ jest zbieżny. Oznaczmy przez $f(x)$ liczbę par liczb naturalnych (i, j), dla których $\sum_{n=i}^{j} u_n \leq x$. Udowodnij, że $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$.

Zadanie 25. Znajdź ciąg liczb naturalnych n_k taki, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty, \qquad \text{ale} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{n_k}} = \infty.$$

Zadanie 26. Załóżmy, że $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ oraz $n > 1$. Wykaż, że

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cdots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$$

Zadanie 27. Obliczyć wartość iloczynu

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right).$$

Zadanie 28. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}} = 3$$

Zadanie 29. a_n jest ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 + a_2(1 - a_1) + a_3(1 - a_1)(1 - a_2) + \cdots = 1.$$

Zadanie 30. Niech A będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, które w swoim zapisie dziesiętnym nie mają cyfry 0. Wyznacz wszystkie α, dla których szereg $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

Zadanie 31. Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

(Przypomnienie:) do domu pisemnie na 3.XI

Zadania domowe będą sprawdzane przez panią Emilię Pompe:
ep($2^4 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 163 - 1$) [na] students {kropa} mimuw (jeszcze kropka) edu ⟨i ostatnia⟩ pl
Można spisać na przykład w LaTeX-u i przysłać e-mailem lub oddać na zajęciach.

Zadanie 32 (już sprawdzone)**.** Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Zadanie 33 (już sprawdzone)**.** Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)}-n\right).$$