

Zadania

23 października 2015

Zadanie 1. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \right)$$

Zadanie 2. Pokazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zadanie 3. Załóżmy $0 < b_1 < a_1$, oraz

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Wykazać, że oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy.

Zadanie 4. Policz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Zadanie 5. Pokaż, że granice następujących szeregów istnieją oraz, że $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$:

$$a = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (\text{znaki na przemian, ułamki po kolei})$$

$$b = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (\text{dwie odwrotności nieparzystych,} \\ \text{minus jedna odwrotność parzystej})$$