

Zadania z AM I.2 do rozwiązania pisemnego na 12 IV 2016

1. Rozstrzygnij, czy funkcja

$$f(x) = \frac{x^3 + \sin(2x^2)}{\ln(1 + x^2)}$$

jest jednostajnie ciągła: (a) na $(0, 1]$, (b) na $[1, +\infty)$, (c) na $(0, +\infty)$.

2. Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 2x \operatorname{tg} x - e^x - e^{-x}}{x^4 \cos x}.$$

3. Czy dla każdej jednostajnie ciągłej funkcji $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ prawdą jest, że:

(a) istnieje $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + \frac{1}{x}) - f(x))$,

(b) istnieje $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x + \frac{1}{x}) - f(x))$?

4. Udowodnij, że dla każdego $x \in [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ zachodzi:

$$\left| \ln x - (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} \right| < \frac{1}{2100}.$$