Przestrzenie Sobolewa

Def: Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ to przestrzeń tych wszystkich dystrybucji $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$, których pochodne aż do rzędu k (a więc i sama dystrybucja T) są dystrybucjami regularnymi, zadanymi przez funkcje z $L^p(\Omega)$.

$$W^{k,p}(\Omega)=\left\{T\in\mathcal{D}'(\Omega):\ \forall_{\alpha:|\alpha|\le k}\ D^\alpha T = T_f \text{ dla jakiegoś } f\in L^p(\Omega)\right\}$$

Tę definicję znacznie łatwiej będzie wypowiedzieć, jeżeli przestaniemy rozróżniać między funkcją $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ a definiowaną przez nią dystrybucją T_f:

$W^{k,p}(\Omega)$ to przestrzeń tych funkcji $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, które, wraz ze wszystkimi swoimi pochodnymi dystrybucyjnymi $D^\alpha f$ rzędu $|\alpha|\le k$ należą do $L^p(\Omega)$.

Tu warto wspomnieć ważne pojęcie: jeżeli pochodna dystrybucyjna $D^\alpha f$ pewnej funkcji $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ jest znów funkcją z $L^1_{loc}(\Omega)$ (tzn., poprawniej, $D^\alpha T_f = T_g$ dla pewnej $g\in L^1_{loc}$), to funkcję g nazywamy α-słabą pochodną funkcji f.

Inaczej: Niech $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Jeżeli istnieje $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ spełniająca, dla każdej $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f \cdot D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \cdot \varphi$$

to funkcję g nazywamy α-słabą pochodną funkcji f i piszemy $g = D^\alpha f$.

Powstaje naturalne pytanie: czy może się zdarzyć, że T nie jest dystrybucją regularną, ale pewne jej pochodne rzędu k będą? wszystkie?

Przykład: Niech $\Omega = (-1,1)^2$. Dystrybucja T dana przez $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi(0,y)\,dy$ nie jest dystrybucją regularną, bo, jak łatwo sprawdzić, jej nośnik to $\{0\} \times (-1,1)$, a więc zbiór miary zero w Ω. Z drugiej strony $\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} T = 0}_{\text{proszę sprawdzić!}}$ jest dystrybucją regularną i należy do $L^p(\Omega)$ dla wszystkich p.

Twierdzenie: Jeżeli $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ oraz dla wszystkich α t.ż. $|\alpha| = k$ mamy $D^\alpha T \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ to $T \in L^p_{loc}(\Omega)$.

__Uwaga:__ nie możemy oczekiwać, przy tych założeniach, że $T \in L^p(\Omega)$ – gdy Ω ma miarę nieskończoną, funkcje stałe nie są całkowalne (choć są lokalnie), a ich pochodne są równe 0.

__Dowód__ (nieco szkicowy)

Rozważmy zbiory otwarte $\mathcal{U} \subset V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $\mathrm{cl}\,\mathcal{U} \Subset V$, $\mathrm{cl}\,V \Subset \Omega$.

„jest zwartym podzbiorem"

Ustalmy $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ takie, że $\varphi \equiv 1$ na V
i $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ takie, że $\eta \equiv 1$ na pewnym otoczeniu 0, ale $\operatorname{supp} \eta \subset B(0, \varepsilon)$.

> __Fakt / zadanie__ (rozwiązanie podstawowe k-laplasjanu)
>
> Niech Γ będzie dana wzorem
>
> $$\Gamma(x) = \begin{cases} c_{n,k} \cdot (-1)^k |x|^{2k-n} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste lub dla } 2k < n, \text{ gdy } n \text{ jest parzyste} \\ c_{n,k} \cdot (-1)^k |x|^{2k-n} \log|x| & \text{gdy } n \text{ jest parzyste i } 2k \geq n \end{cases}$$
>
> Wówczas $\Delta^k \Gamma := \sum_{|\alpha| = k} D^\alpha D^\alpha \Gamma = \delta_0$ $\Big\}$ przy odpowiednio dobranej stałej $c_{n,k}$.
>
> Co więcej, $D^\alpha \Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich α takich, że $|\alpha| \leq k$

Zastosujmy wzór Leibniza do obliczenia $\Delta^k(\eta\Gamma)$. Wynik to suma składników postaci (pewna pochodna η) $\cdot$ (pewna pochodna Γ).

Γ i jej pochodne są funkcjami gładkimi poza 0, w którym mają osobliwość.

Pochodne η to funkcje o nośniku zwartym, które znikają w otoczeniu 0, więc wyrazy (pewna pochodna η) $\cdot$ (Γ lub jej pochodna) są funkcjami gładkimi o nośniku zwartym.
Zostaje tylko jeden wyraz, w którym cały Δ^k pada na Γ: $\eta \cdot \Delta^k \Gamma = \eta \cdot \delta_0 = \delta_0$.
Stąd $\Delta^k(\eta\Gamma) = \zeta + \delta_0$, gdzie $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Niech $S = \varphi \cdot T$.

$$S * \Delta^k(\eta\Gamma) = S * (\zeta + \delta_0) = S * \zeta + S * \delta_0$$
$$= S * \zeta + S$$

Z drugiej strony

$$S * \Delta^k(\eta\Gamma) = S * \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha D^\alpha(\eta\Gamma) =$$
$$= \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha S * D^\alpha(\eta\Gamma).$$

Szkic

$$S = \sum_{|\alpha|=k} \underbrace{D^\alpha S * D^\alpha(\eta\Gamma)} - \underbrace{S * \zeta}$$

to jest funkcja gładka, więc z $L^p_{loc}(\Omega)$

Zauważmy, że na V mamy $D^\alpha S = D^\alpha(\varphi T) =$
$= \varphi D^\alpha T$, bo pochodne φ na V są zero!

Niech teraz $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{cl} \mathcal{U}, \Omega \setminus V)$, wtedy dla $x \in \mathcal{U}$, $|\alpha| = k$,

$$D^\alpha(\eta\Gamma) * D^\alpha S = \underbrace{D^\alpha(\eta\Gamma)}_{\text{to należy do } L^1(V)} * \underbrace{\varphi D^\alpha T}_{\text{a to do } L^p(V)}$$

bo nośnik splotu jest zawarty w V

i z własności splotu (splot czegoś z L^1 z czymś z L^p jest w L^p — nier. Younga)

$D^\alpha(\eta\Gamma) * D^\alpha S \in L^p(\mathcal{U})$, więc $S \in L^p(\mathcal{U})$

Z dowolności wyboru $\mathcal{U}$ t.ż. $\operatorname{cl}\mathcal{U} \subset\subset \Omega$ mamy, że $S \in L^p_{loc}(\Omega)$.

No, ale twierdzenie mówi, że $T \in L^p_{loc}(\Omega)$, nie $L^p(\Omega)$, choć przeszkodę – oczywiście – do usunięcia „loc" widzimy tylko dla obszarów o mierze nieskończonej.

Okazuje się, że nawet w przypadku, gdy Ω jest obszarem ograniczonym, nie możemy wzmocnić tezy twierdzenia

<u>Def.</u> Przestrzenią Beppo-Levi $BL^{k,p}(\Omega)$ nazywamy przestrzeń tych ~~dystrybucji~~ funkcji $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, których wszystkie pochodne $D^\alpha f$ rzędu $|\alpha| = k$ należą do $L^p(\Omega)$

tu mogę napisać „funkcji", bo z poprzedniego Twierdzenia wiemy, że $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, więc jest dystrybucją regularną.

Wprowadza się też przestrzeń $\mathring{W}^{k,p}(\Omega) = BL^{k,p} \cap L^p(\Omega)$

Nawet dla Ω ograniczonego $W^{k,p}(\Omega)$, $BL^{k,p}(\Omega)$ i $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ mogą być różne.

Przykłady niebawem.

Ale dla przyzwoitych zbiorów Ω mamy $W^{k,p}(\Omega) = \mathring{W}^{k,p}(\Omega) = BL^{k,p}(\Omega)$, a głównym narzędziem do wykazania tych równości jest <u>nierówność Poincarégo</u>. o niej też niebawem.

Na przestrzeniach $W^{k,p}(\Omega)$ i $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ wprowadzamy normy

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \|D^\alpha f\|_p$$

$$\|f\|_{\mathring{W}^{k,p}} = \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha f\|_p + \|f\|_p$$

Na przestrzeni $BL^{k,p}(\Omega)$ mamy tylko półnormę

$$[f]_{BL^{k,p}} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p .$$

Naszym celem – na najbliższe 2 (?) wykłady – jest doprecyzowanie poniższego twierdzenia

„Twierdzenie": Jeżeli Ω jest sensowny i ograniczony, to dla dowolnego $u \in BL^{k,p}(\Omega)$ istnieje P – wielomian stopnia $\le k-1$ taki, że

$$\sum_{0 \le |\alpha| \le k-1} \|D^\alpha (u-P)\|_p \le C(n,k,p,\Omega) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p$$

NIERÓWNOŚĆ POINCARÉ

Ponieważ dla sensownych, ograniczonych Ω, wielomian P należy do $W^{k,p}(\Omega)$, a z nierówności Poincaré wynika, że $u-P \in W^{k,p}$, to również $u \in W^{k,p}$ (a więc i do $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$).

Co więcej (prościutkie ćwiczenie) na sensownych Ω normy $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ i $\|\cdot\|_{\mathring{W}^{k,p}}$ są równoważne.

Nim przejdziemy do tych zagadnień, udowodnijmy pożyteczny lemat, znany jako reprezentacja całkowa funkcji gładkiej.

<u>Lemat</u>: Niech $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \underbrace{\frac{1}{n\omega_n}}_{\text{miara } n\text{-wym. sfery}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle x-y, \nabla u(y)\rangle}{|x-y|^n}\, dy$$

$\longleftarrow$ iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

<u>Dowód</u>: Ustalmy $s \in S^{n-1}(0,1) \overset{\text{ozn.}}{=} \mathbb{S}^{n-1}$. Mamy

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt} u(x+st)\, dt = -\int_0^\infty \langle \nabla u(x+st), s\rangle\, dt$$

$$= \frac{-1}{|S^{n-1}(0,1)|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \langle \nabla u(x+st), s\rangle\, dt =$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} -\frac{1}{n\omega_n} \int_0^\infty t^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\langle \nabla u(x+st), s\rangle}{t^{n-1}}\, ds\, dt$$

to jest całka po całym $\mathbb{R}^n$, we wsp. biegunowych o środku w x

przejdźmy do kartezjańskich: $y = x+st$, $t = |x-y|$

$dy = t^{n-1}\, ds\, dt$

$s = \frac{y-x}{|x-y|}$

$$= -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left\langle \nabla u(y), \frac{y-x}{|x-y|}\right\rangle}{|x-y|^{n-1}}\, dy = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle x-y, \nabla u(y)\rangle}{|x-y|^n}\, dy$$

$\square$.