Przestrzeń Schwartza

Przestrzenią Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nazywamy przestrzeń tych wszystkich funkcji gładkich na $\mathbb{R}$, które wraz z wszystkimi pochodnymi szybko wygasają w nieskończoności. Dokładniej

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gdy $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ oraz dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty .$$

Analogicznie definiujemy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{ dla dowolnych multiindeksów } \alpha, \beta \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left| \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta}(x) \right| < \infty \right\}$$

Oczywiście $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ale nietrudno też sprawdzić, że np $e^{-|x|^2}$ należy do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, choć nie ma zwartego nośnika. Łatwo też można sprawdzić, że $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $p \in [1, \infty]$, co więcej, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest gęsta w $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 \le p < \infty$, bo zawiera $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (a te są w L^p gęste).

Na przestrzeni Schwartza wprowadzamy topologię poprzez rodzinę półnorm

$$p_k(f) = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{k/2} |D^\alpha f(x)|$$

(tzn. $f_m \to f$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff \forall_k \; p_k(f_m - f) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$)

lub, równoważnie, poprzez metrykę

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)} \cdot 2^{-k} \qquad (*)$$

Zadanko: sprawdzić, że $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ jest zupełną przestrzenią metryczną (w szczególności, że d jest metryką)

Przestrzeń liniową zupełną z metryką $(*)$ pochodzącą od rodziny półnorm nazywa się przestrzenią Frécheta, przestrzenie tego typu są ważnym uogólnieniem przestrzeni Banacha.

Stwierdzenie: Jeżeli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to dla dowolnych multiindeksów α, β

$$x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Dowód trywialny.

Transformata Fouriera

Def: Transformatą Fouriera funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nazywamy funkcję $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ daną wzorem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

Uwaga: Rozważamy funkcje o wartościach zespolonych.

Własności

a) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, gdzie przez $C_0(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy funkcje ciągłe znikające w nieskończoności. Co więcej, $\mathcal{F}$ jest ciągłym operatorem liniowym między tymi przestrzeniami: $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Dowód: liniowość jest oczywista, mamy też $\forall_{\xi \in \mathbb{R}^n}$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1 .$$

Ciągłość $\hat{f}$ wynika z tw. Lebesgue'a o zb. zmajoryzowanej: gdy $\xi \to \zeta$, to

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \xrightarrow{\text{TLOZZ}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \zeta} dx = \hat{f}(\zeta)$$

Pozostaje sprawdzić, że $\hat{f}(\xi) \to 0$ przy $\xi \to \infty$.

Mamy $\hat{f}(\xi) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx}_{I} = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x - \frac{\xi}{2|\xi|^2})\cdot \xi} dx$

$$= \underbrace{-\int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx}_{II} = \frac{1}{2}\left(I + II\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right) e^{-2\pi i x\cdot \xi} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{\left(f - \tau_{\xi/2|\xi|^2} f\right)},$$ skąd

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2}\|f - \tau_{\xi/2|\xi|^2} f\|_1 \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0, \text{ bo } \frac{\xi}{2|\xi|^2} \to 0.$$

b) dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mamy $(\cdot)$ $f\cdot\hat{g}$, $\hat{f}\cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

i $\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g$ i $(\cdot\cdot)$ $(f * g)^\wedge = \hat{f}\cdot\hat{g}$.

<u>Dowód</u>: wykażemy $(\cdot\cdot)$:

$$(f*g)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy\right) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi} dx}_{=\hat{f}(\xi)}\Big) g(y) e^{-2\pi i y\cdot \xi} dy =$$

$$= \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi).$$

W punkcie (•) to, że $f\cdot\hat{g}$ i $\hat{f}\cdot g$ należą do L^1 wynika od razu z a), a dokładniej stąd, że $\hat{f}$ i $\hat{g}$ są ograniczone, a $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}$ znów wprost z tw. Fubiniego.

c) $\forall_{\xi, h\in\mathbb{R}^n}$ $\quad (\tau_h f)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}$

$$\left(f(x)e^{2\pi i h\cdot x}\right)^\wedge = \hat{f}(\xi-h) = \tau_{-h}\hat{f}(\xi)$$

Dowód: $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x-h)\cdot\xi}dx = e^{2\pi i h\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx =$$

$$= e^{2\pi i h\cdot\xi}\hat{f}(\xi).$$

Druga równość analogicznie.

d) Oznaczmy $f_t(x) = t^{-n}f(x/t)$. Wówczas

$$\widehat{f_t}(\xi) = \hat{f}(t\xi) \quad \text{oraz} \quad \widehat{f(tx)} = (\hat{f})_t(\xi)$$

Dowód: Prosty rachunek.

e) Jeżeli T jest przekształceniem ortogonalnym $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$, $T\in O(n)$, to $\widehat{f\circ T} = \hat{f}\circ T$.

Dowód: znów prosty rachunek:

$$\widehat{f\circ T}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \overset{y=Tx}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i (T^{-1}y)\cdot\xi}dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i y\cdot(T\xi)}dy = \hat{f}(T\xi).$$

Oczywiście wszystkie te własności, wykazane dla $f\in L^1$, zachodzą dla $f\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$

Transformata Fouriera a pochodna

Twierdzenie: Jeżeli $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to

a) $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$

b) transformata Fouriera funkcji ~~...~~ $f(x)$ jest różniczkowalna ~~...~~ i

$$\mathcal{F}(-2\pi i x_j f(x))(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi).$$

Dowód: Niech $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\ni(x', x_j)$.

a) $$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx_j\right)dx'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\underbrace{f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty}}_{=0,\ \text{bo}\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} + 2\pi i\xi_j\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx_j\Big)dx'$$

$$= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

b) $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$ i widzimy, że

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right) = -2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

(jednostajnie względem ξ),

bo $x_j f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

więc możemy wejść z różniczkowaniem pod znak całki, co daje tezę.

Zadanie: Wykazać, że gdy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest ciągła w topologii $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ten rachunek nie daje się przeprowadzić, ale coś możemy udowodnić:

Tw. Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i dla pewnego $k \in \{1, \dots, n\}$ mamy $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $\hat{f}$ jest różniczkowalna względem ξ_k oraz

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k} = \left(-2\pi i x_k f(x)\right)^\wedge.$$

Dowód:

$$\frac{\hat{f}(\xi + he_k) - \hat{f}(\xi)}{h} = \frac{\tau_{he_k}\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi)}{h} \stackrel{c)}{=}$$

$$= \Bigg(\underbrace{\frac{e^{-2\pi i h e_k \cdot x} - 1}{h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ -2\pi i x_k}} f(x)\Bigg)^\wedge(\xi) \xrightarrow[h \to 0]{\substack{\text{Tw. Lebesgue'a} \\ \text{o zb. zmaj.}}} \widehat{-2\pi i x_k f(x)}(\xi)$$

tu majoranta jest np. $3\pi |x_k f(x)|$ □.

Z drugą tożsamością jest trochę trudniej.

Def: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ jest L^p-różniczkowalna względem x_k, gdy $\frac{\tau_{he_k} f - f}{h} \xrightarrow{L^p} g$ dla pewnej $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$; funkcję g nazywamy wtedy L^p-pochodną cząstkową f wzgl. x_k (i oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_k}$:))

Twierdzenie: Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest L^1-różniczkowalna wzgl. x_k, to $\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi)$

Dowód:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^\wedge(\xi) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^\wedge(\xi) - \hat{f}(\xi)\frac{e^{2\pi i h e_k \cdot \xi} - 1}{h}\right) + \hat{f}(\xi)\frac{e^{2\pi i h e_k \cdot \xi} - 1}{h}$$

$$= \underbrace{\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} \Big)^{\wedge}(\xi)}_{\substack{\text{to dąży do } 0 \text{ w } L^1 \\ \text{przy } h\to 0\text{, więc z ciągłości} \\ \mathcal{F} \text{ na } L^1 \text{ mamy, że} \\ \text{to dąży przy } h \to 0 \text{ do zera}}} + \underbrace{\hat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi i h e_k \cdot \xi} - 1}{h}}_{\substack{\text{a to dąży przy } h\to 0 \\ \text{do } \hat{f}(\xi)\cdot 2\pi i \xi_k}}$$

$$= 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi).$$

<u>Ważny rachunek</u>: <u>Stwierdzenie</u>: Jeżeli $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, to $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

<u>Dowód</u>: Wystarczy to udowodnić dla $n=1$, bo przypadek ogólny dostajemy wtedy od razu:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_k^2} \cdot e^{-2\pi i x_k \cdot \xi_k} dx_k}_{\text{transformata Fouriera w } \mathbb{R}.}$$

Dowód dla $n=1$ Niech $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

Mamy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i $f'(x) = -2\pi x f(x)$.

$$\widehat{f'}(\xi) = (-2\pi x f(x))^\wedge(\xi) = -i\,(-2\pi i x f(x))^\wedge(\xi)$$
$$= -i\,(\hat{f})'(\xi)$$

ale też $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$, więc

$$(\hat{f})'(\xi) = -2\pi \xi \hat{f}(\xi), \text{ skąd } \hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} \cdot C.$$

Na koniec, $C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

□.

Odwracanie transformaty Fouriera

Najpierw prosta część:

Twierdzenie: Jeżeli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \qquad (*)$$

Wniosek: $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = -\mathrm{id}$ (na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$),

czyli $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

Dowód: Przypomnijmy, że gdy $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$h_t(x) = t^{-n} h(x/t)$, to $\widehat{h(tx)}(\xi) = (\hat{h})_t(\xi)$.

Stosując ten wzór do $h(x) = e^{-\pi|x|^2}$ i $t = \sqrt{\varepsilon/\pi}$

dostajemy, dla $g(x) = e^{-\varepsilon|x|^2}$, $\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} e^{-(\pi|\xi|)^2/\varepsilon}$

Stąd
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{\varepsilon}}\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{\pi}}\,y\right) e^{-\pi|y|^2}\,dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{Tw. L. o zb. zm.}} f(0)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2}\,dy$$
$$= f(0).$$

Z drugiej strony
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-\varepsilon|x|^2}\,dx$$
$$\Big\downarrow\ \varepsilon \to 0 \quad (\text{tw. L. o zb. zm.})$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,dx,$$

więc dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mamy $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,dx = f(0)$.

Stąd, dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^n$ i $g = \tau_y f$,
$$f(y) = \cancel{\tau_y} g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_y f}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y\cdot x} f(x)\,dx$$

□.

Wzór (*) można, w ten sam sposób, udowodnić dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pod warunkiem, że również $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i w tych $x \in \mathbb{R}^n$, w których f jest ciągła. Widzimy, że $\mathcal{F}^{-1}$ jest, z dokładnością do odbicia, równe $\mathcal{F}$, więc warunek $\hat{f} \in L^1$ oznacza automatycznie ciągłość f – ale pokazuje to też, że nasza metoda (i wzór (*)) nie działają dla żadnej $f \in L^1 \setminus C_0$. Czy dla takich funkcji w ogóle umiemy odtworzyć f z $\hat{f}$?

Z pomocą przychodzą nam tzw. <u>metody sumowalności</u>. Pomysł jest dość prosty: całka $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$ może nie być zbieżna, ale możemy funkcję podcałkową domnożyć przez „czynnik zbieżniający", zależny od parametru $t \geq 0$, który przy $t \to 0$ dąży do 1, i liczyć, że uzyskane całki będą miały granicę.

Podstawą tych metod jest twierdzenie, które podam (z braku czasu) bez dowodu.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ będzie takie, że $\varphi = \hat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

Niech $M_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} \phi(t\xi)\,d\xi$.

Wówczas $M_t \longrightarrow f$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$ przy $t \to 0$

Dodatkowo, jeżeli istnieje $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ t.ż.

$\forall_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ $t \longmapsto \psi(tx)$ jest ~~maleje~~ nierosnąca

i $|\varphi(x)| \leq \psi(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, $\left\{ \begin{array}{l} \psi \text{ jest radialnie} \\ \text{nierosnącą majorantą } \varphi \end{array} \right.$

to $M_t \longrightarrow f$ p.w. na $\mathbb{R}^n$ przy $t \to 0$.

~~Natomiast~~ Gdy weźmiemy $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wiemy już, że $1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\,dx = \phi(0) = \lim_{t\to 0} \phi(t\xi)$

W szczególności gdy $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $M_t(x) \xrightarrow{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi$

z tw. o zbieżności zmajoryzowanej.

Naturalnym wyborem $\phi(x)$ jest $e^{-\pi|x|^2}$

(bo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, φ znany, $\phi(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi$).

Z tradycyjnych względów bierze się nieco inaczej przeskalowane Φ, tzn. $\Phi(x) = e^{-4\pi^2 |x|^2}$, wtedy $\varphi(x) = (4\pi)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$. Dostajemy wówczas, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} \Phi(\sqrt{t}\,\xi)\, d\xi \xrightarrow{t\to 0} f \quad \begin{matrix} w\ L^1 \\ i\ p.w. \end{matrix}$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}$$

$$\cancel{\mathcal{F}\left(\hat{f}(\xi)\Phi(\sqrt{t}\,\xi)\right)(-x) = f * \varphi_{\sqrt{t}}(-x) =}$$

$$\cancel{= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, \varphi_{\sqrt{t}}(}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\, \mathcal{F}\left(e^{2\pi i x\cdot\xi} \Phi(\sqrt{t}\,\xi)\right)(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\, \tau_{-x} \varphi_{\sqrt{t}}(\zeta)\, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\, \varphi_{\sqrt{t}}(\zeta - x)\, d\zeta =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\, \varphi_{\sqrt{t}}(x-\zeta)\, d\zeta = f * \varphi_{\sqrt{t}}(x)$$

$$\varphi_{\sqrt{t}}(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} \leftarrow \text{jądro Gaussa-Weierstrassa.}$$

Transformata Fouriera na $L^2(\mathbb{R}^n)$

Wzór

$$\hat{f}(\xi) \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

dla funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ może nie mieć sensu - funkcja podcałkowa może nie być całkowalna. Zauważmy jednak, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{2\pi i x\cdot\xi} dx$$

$$= \mathcal{F}(\overline{f})(-\xi).$$

Jeżeli więc przez g oznaczymy $g = \overline{\hat{f}}$,

to $\hat{g} = \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}(f)}\right) = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(\overline{f}) \circ \underbrace{(-id)}_{\text{p-nie ortogonalne}}\big) = \overline{f} \circ (-id) \circ (-id)$

$$= \overline{f}$$

skąd $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \overline{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \cdot g = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \cdot \overline{\hat{f}} = \|\hat{f}\|_2$

Udowodniliśmy powyżej twierdzenie (lub wzór) Plancherela, a w każdym razie jego wersję dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Równość $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ oznacza, że transformata Fouriera $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest izometrią, gdy na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rozpatrujemy metrykę pochodzącą od $\|\cdot\|_2$.

Wiemy, że $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest gęste w $L^2(\mathbb{R}^n)$, więc $\mathcal{F}: (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$, które, jako izometria, jest jednost. ciągłe, rozszerza się jednoznacznie do izometrii $L^2(\mathbb{R}^n)$ w siebie — w ten sposób możemy zdefiniować $\mathcal{F}$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$: bierzemy ciąg

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f_m \xrightarrow{L^2} f, \text{ wtedy } \mathcal{F}(f_m) \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(f),$$

$$\text{gdzie } \hat{f}_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx, \text{ bo } f_m \in \mathcal{S}.$$

Zadanko: Uzasadnić, że $\forall_{f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^m)}$ mamy

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx.$$

Twierdzenie: Dla $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mamy

$(\cdot)$ $$\int_{|x|<R} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \hat{f}(\xi) \text{ w } L^2(\mathbb{R}^n)$$

$(\cdot\cdot)$ $$\int_{|x|<R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} f(x) \text{ w } L^2(\mathbb{R}^n)$$

Dowód:

(•) $\int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx = \widehat{(f\cdot\chi_{B_R})}(\xi)$,

ale wiemy, że $f\cdot\chi_{B_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} f$ w $L^2(\mathbb{R}^n)$,

więc z ciągłości $\mathcal{F}$ na L^2 dostajemy teza.

(••) dokładnie tak samo. $\square$

Warto też zauważyć, że bez trudu, przez gęstość $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w $L^2(\mathbb{R}^n)$, możemy udowodnić że $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}$.

Transformata Fouriera na $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $p\in(1,2)$

Rozważmy przestrzeń $L^1+L^2(\mathbb{R}^n) = \{f+g : f\in L^1(\mathbb{R}^n), g\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.

Dla $h\in L^1+L^2(\mathbb{R}^n)$, $h=f+g$ możemy zdefiniować $\hat{h} = \hat{f}+\hat{g} \in C_0 + L^2(\mathbb{R}^n)$

Ta definicja ma sens, o ile nie zależy od przedstawienia h jako sumy:

Zadanie: wykazać, że jeżeli

$h = f_1+g_1 = f_2+g_2$, $f_1,f_2\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_1,g_2\in L^2(\mathbb{R}^n)$, to $\hat{f}_1 + \hat{g}_1 = \hat{f}_2 + \hat{g}_2$ p.w.

Dalej, nietrudno wykazać, (kolejne Zadanie), że $\forall_{p \in (1,2)}$ $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1 + L^2(\mathbb{R}^n)$, co pozwala zdefiniować $\mathcal{F}$ na $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0 + L^2(\mathbb{R}^n)$$

W rzeczywistości, okazuje się, że

$\mathcal{F}: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

i $\|\hat{f}\|_q \leq C(p,n)\|f\|_p$ (nierówność Hausdorffa-Younga),

ale to wymaga już wejścia w teorię interpolacji operatorów, a to zupełnie inna historia...