Def: Mówimy, że zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ma brzeg jednostajnie lipszycowski, gdy istnieją $\varepsilon, L > 0$, $M \in \mathbb{N}$ i przeliczalne, lokalnie skończone pokrycie $\{\Omega_m\}$ zbioru $\partial\Omega$ takie, że

(·) jeżeli $x \in \partial\Omega$, to $B(x,\varepsilon) \subset \Omega_m$ dla pewnego m

(··) $\forall_{y \in \mathbb{R}^n}$ y należy do co najwyżej M zbiorów pokrycia $\{\Omega_m\}$

(···) dla każdego m istnieje $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz funkcja lipszycowska $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Lip} f \leq L$, takie, że

$$\Omega_m \cap \Omega = \Omega_m \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_i > f(\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\text{bez } y_i})\}$$

Twierdzenie (Stein) Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty i ma brzeg jednostajnie lipszycowski, to istnieje ciągły, liniowy operator rozszerzenia $\mathcal{E} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ taki, że $\forall_{u \in W^{1,p}(\Omega)}$ mamy $\mathcal{E}(u) = u$ p.w. na Ω

oraz
$$\|\mathcal{E}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (1 + 2M) \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\|\nabla \mathcal{E}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq C(n, M, L) \left(\underline{\tfrac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^p(\Omega)}} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} \right)$$

Luc Tartar wykazał, że gdy Ω jest ograniczony, to można pozbyć się tego wyrazu.

Lemat (rozszerzenie przez odbicie)

Niech $f: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją lipszycowską i niech $\Omega = \{x_n > f(x_1, \dots, x_{n-1})\} \subset \mathbb{R}^n$.

Wówczas istnieje ciągły, liniowy operator rozszerzenia $\mathcal{E}: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ taki, że $\mathcal{E}(u) = u$ p.w. na Ω oraz

$$\|\mathcal{E}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\|\nabla \mathcal{E}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq (2 + \mathrm{Lip} f)\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

Szkic dowodu:

Krok 1: prostujemy brzeg.

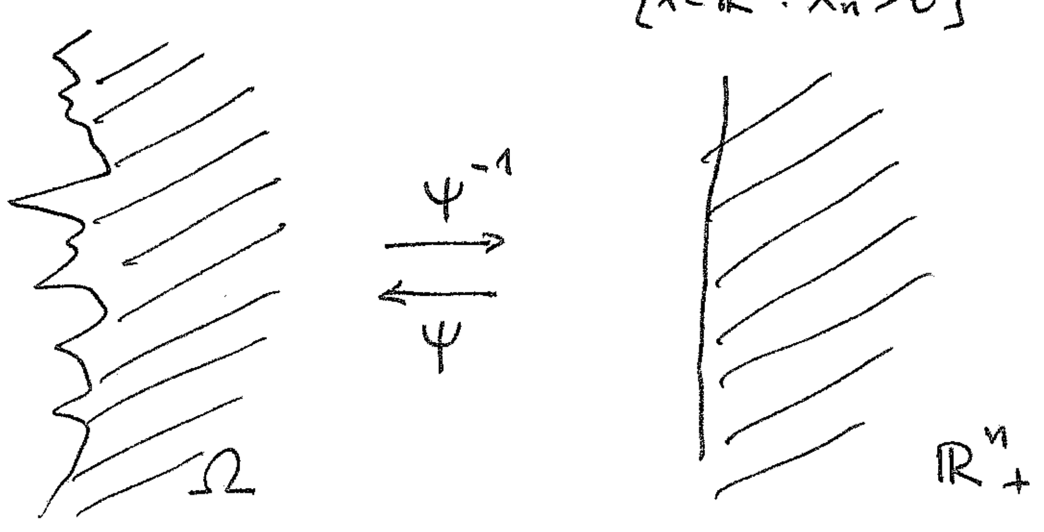
Przekształcenie $\Psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem

$$\Psi(\underbrace{z_1, \dots, z_{n-1}}_{\text{ozn. } z'}, z_n) = (z', z_n + f(z'))$$ jest odwracalne

i lipszycowskie, odwrotne do niego

$\Psi^{-1}(x', x_n) = (x', x_n - f(x'))$ też jest lipszycowskie

i $J_\Psi = 1$ p.w. Co więcej, $\Psi(\underset{\substack{\uparrow \\ \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}}}{\mathbb{R}^n_+}) = \Omega$.



Krok 2

Mając $u \in W^{1,p}(\Omega)$ kładziemy $w(z) = (u \circ \Psi)(z)$ dla $z \in \mathbb{R}^n_+$; $w(z) = u(z', z_n + f(z'))$,

po czym rozszerzamy w przez odbicie z $\mathbb{R}^n_+$ na całe $\mathbb{R}^n$:

$$\tilde{W}(z) = \begin{cases} w(z) & \text{gdy } z_n > 0 \\ w(z', -z_n) & \text{gdy } z_n < 0. \end{cases}$$

i wracamy na Ω:

$$\mathcal{E}(u) = \tilde{W} \circ \Psi^{-1};$$

$$\mathcal{E}(u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{gdy } x_n > f(x') \\ u(x', 2f(x') - x_n) & \text{gdy } x_n < f(x'). \end{cases}$$

Prosty rachunek pokazuje, że $\mathcal{E}(u)$ spełnia oszacowania z tezy lematu, w szczególności że $\mathcal{E}(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. $\square$.

Szkic dowodu tw. Steina

Oznaczenie: dla dowolnego $E \subset \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ niech $E^r = \{x \in \mathbb{R}^n : B(x,r) \subset E\}$

Przy tym oznaczeniu warunek ($\circ$) w definicji brzegu jednost. lipszycowskiego oznacza, że $\partial\Omega \subset \bigcup_m \Omega_m^\varepsilon$.

Zacznijmy od skonstruowania, dla każdego m, takich gładkich funkcji φ_m, że $\operatorname{supp}\varphi_m \subset \Omega_m$, $\varphi_m \equiv 1$ na $\Omega_m^{\varepsilon/2}$ oraz $|\nabla\varphi_m| \le \frac{C}{\varepsilon}$, gdzie C nie zależy od m ani od ε.

Można to zrobić np. tak: mając gładką, nieujemną η, $\operatorname{supp}\eta \subset B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n}\eta = 1$, budujemy z η jedność aproksymatywną η_δ, wtedy $\varphi_m = \eta_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_m^{3/4\varepsilon}}$ spełnia nasze wymagania (prosty rachunek)

Dalej zdefiniujmy $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,\Omega) < \varepsilon/4\}$,

$$\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \tfrac{3}{4}\varepsilon\},$$

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \tfrac{\varepsilon}{4}\}.$$

i połóżmy $\varphi_0 = \eta_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_0}$,

$$\varphi_\pm = \eta_{\varepsilon/4} * \chi_{\Omega_\pm}.$$

Wtedy $\varphi_0 \equiv 1$ na $\overline{\Omega}$,

$\varphi_+(x) = 1$ gdy $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \le \frac{\varepsilon}{2}$,

$\varphi_-(x) = 1$ gdy $x \in \Omega$, $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \ge \varepsilon/2$.

Dalej, $\operatorname{supp}\varphi_0 \subset$ $\varepsilon/2$-otoczenie Ω

$\operatorname{supp}\varphi_+ \subset$ ε-otoczenie $\partial\Omega$

$\operatorname{supp}\varphi_- \subset \Omega$

i $\|\nabla\varphi_{\overset{0}{\pm}}\|_\infty \le \frac{C}{\varepsilon}$.

Jeżeli teraz przyjmiemy
$$\psi_+ = \varphi_0 \frac{\varphi_+}{\varphi_+ + \varphi_-}, \quad \psi_- = \varphi_0 \frac{\varphi_-}{\varphi_+ + \varphi_-} \quad \left(\begin{array}{l} \text{zero,} \\ \text{gdy} \\ \varphi_0 = 0 \end{array} \right)$$

to pochodne $\psi_\pm$ też będą się szacować przez $\frac{C}{\varepsilon}$

i $\psi_+ + \psi_- = 1$ na $\overline{\Omega}$

$\psi_+ = \psi_- = 0$ poza $\varepsilon/2$-otoczeniem Ω.

No to przystępujemy do konstrukcji $\mathcal{E}$.

Niech $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wtedy $\varphi_m u$ ma nośnik w Ω_m, więc korzystając z Lematu możemy przedłużyć $\varphi_m u$ do $v_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tak, że

$$\|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2\|\varphi_m u\|_{L^p(\Omega\cap\Omega_m)}$$

$$\|\nabla v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \le (2+L)\,\|\nabla(\varphi_m u)\|_{L^p(\Omega\cap\Omega_m,\mathbb{R}^n)}$$

Kładziemy
$$\mathcal{E}(u)(x) = \psi_+(x)\,\frac{\sum_m \varphi_m(x) v_m(x)}{\sum \varphi_m^2(x)} + \psi_-(x)\,u(x).$$

Łatwo widać, że $\mathcal{E}(u) = u$ na Ω, sprawdzenie oszacowań to proste rachunki. $\square$.

<u>Def</u>: Mówimy, że zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ma własność rozszerzania dla $W^{1,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ (jest „$W^{1,p}$ – extension domain"), gdy istnieje ciągły, liniowy operator rozszerzenia $\mathcal{E}: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tż.
$\forall_{u \in W^{1,p}(\Omega)}$ $\mathcal{E}(u) = u$ p.w. na Ω.

Tw. Steina mówi, że obszary z brzegiem jednostajnie lipszycowskim mają własność rozszerzania dla $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$; nietrudno też sprawdzić, że dla $p = \infty$ też. W ogólności to, czy dany obszar Ω ma tę własność może zależeć od p, nie jest też znana, poza przypadkiem $n = 2$, $p = 2$ (Jones) pełna charakteryzacja $W^{1,p}$-extension domains w $\mathbb{R}^n$, jest to przedmiot intensywnych badań.

Do kolejnego twierdzenia będziemy potrzebowali nietrudnego rachunku, który Państwu zostawię jako zadanie:

<u>Zadanie</u>: Niech φ_k będzie jednością aproksymatywną, $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\int \varphi = 1$, $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$. Wtedy dla dowolnej $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\| u * \varphi_k - u \|_p \le \frac{C(n,p,\varphi)}{k} \| \nabla u \|_p .$$

<u>Twierdzenie Rellicha - Kondraszowa</u>

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym o skończonej mierze, który ma własność rozszerzania dla $W^{1,p}$, $1 \le p < n$.
Oznaczmy przez $p^* = \frac{np}{n-p}$ wykładnik jak w nier. Sobolewa
Wówczas dla każdego $q \in [1, p^*)$
z każdego ciągu ograniczonego w $W^{1,p}(\Omega)$ możemy wybrać podciąg (silnie) zbieżny w $L^q(\Omega)$.

<u>Uwaga</u>: Z tw. Sobolewa, refleksywności $L^{p^*}(\Omega)$ i tw. Banacha-Alaoglu łatwo wynika, że z każdego ciągu ograniczonego w $W^{1,p}(\Omega)$, który (tw. Sobolewa) jest też ograniczony w $L^{p^*}(\Omega)$, możemy wybrać podciąg <u>słabo</u> zbieżny w $L^{p^*}(\Omega)$.

Dowód tw. Rellicha-Kondraszowa

Niech (u_m) będzie ciągiem ograniczonym w $W^{1,p}(\Omega)$, $\forall_m \ \|u_m\|_{W^{1,p}} \le M$

<u>Krok 1</u>. Funkcje u_m możemy rozszerzyć (nie zmieniając, dla uproszczenia, oznaczenia) do $u_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, przy czym ciąg (u_m) jest ograniczony w $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ przez $C\cdot M$, a więc, z tw. Sobolewa, w $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Jak w Uwadze, wybierzmy podciąg (u_{m_l}) słabo zbieżny w $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Wykażemy, że $\cancel{u_{m_l} \rightharpoonup}$ gdy $u_{m_l} \rightharpoonup u$ w $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, to $u_{m_l} \longrightarrow u$ w $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dalej, by nie mnożyć znaczków, będę zakładał, że $u_m \rightharpoonup u$ w L^{p^*}.

Ustalmy, jak w zadaniu, jedność aproksymatywną η_k i niech, dla $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $f^{(k)} := f * \eta_k$.

Z Zadania
$$\|u_m^{(k)} - u_m\|_p \le \frac{C(n,p,\eta)}{k}\|\nabla u_m\|_p \le \frac{C(n,p,\eta)}{k} M$$

i tak samo $\|u^{(k)} - u\|_p \le \frac{C(n,p,\eta)}{k} M$

Mamy

$$\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_m - u_m^{(k)}\|_{L^p(\Omega)} +$$

$$+ \|u_m^{(k)} - u^{(k)}\|_{L^p(\Omega)} + \|u^{(k)} - u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\le \frac{C(n,p,\eta,M)}{k} + \|u_m^{(k)} - u^{(k)}\|_{L^p(\Omega)},$$

Jeżeli więc ustalimy $\varepsilon > 0$, to znajdziemy k_0 takie, że

$$\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_m^{(k_0)} - u^{(k_0)}\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon/2.$$

Chcemy wykazać, że to dąży przy $m \to \infty$ do zera.

Mamy $u_m^{(k_0)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_m(y)\,\eta_{k_0}(x-y)\,dy$

$\downarrow m \to \infty$

$u^{(k_0)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\,\eta_{k_0}(x-y)\,dy$

bo $u_m \rightharpoonup u$ w L^{p^*}, a $\eta_{k_0}(x-\cdot)$ należy do $(L^{p^*})'$.

więc $u_m^{(k_0)} \to u^{(k_0)}$ punktowo,

mamy też

$$|u_m^{(k_0)}(x) - u^{(k_0)}(x)|^p \le \int_{\mathbb{R}^n} |u_m - u|^p \cdot \sup|\eta_{k_0}| \le C \cdot k_0^n \cdot 2^p M^p$$

$\leftarrow$ ograniczone, więc całkowalne po Ω.

Stąd $\displaystyle\int_\Omega |u_m^{(k_0)}(x) - u^{(k_0)}(x)|^p dx \xrightarrow[m\to\infty]{\text{tw. Lebesgue'a o zb. zmaj}} 0$

$$\| u_m^{(k_0)} - u^{(k_0)} \|^p_{L^p(\Omega)} .$$

Znajdziemy więc m_0 t.że $\forall_{m>m_0}$ $\|u_m^{(k_0)} - u^{(k_0)}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$,

co w sumie daje $\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ gdy $m > m_0$,

skąd

~~$\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, czyli~~

$u_m \to u$ w $L^p(\Omega)$.

$\Downarrow$

$u_m \to u$ w $L^q(\Omega)$ dla każdego $q \in [1, p]$

ale dla $q \in (p, p^*)$ mamy

$$\|u - u_m\|_{L^q(\Omega)} \le \|u - u_m\|^\theta_{L^p(\Omega)} \|u - u_m\|^{1-\theta}_{L^{q^*}(\Omega)}$$

dla odp. dobranego θ (Hölder)

a to dąży do zera.

to jest ograniczone przez $2CM$

$\square$.

Ułamkowe przestrzenie Sobolewa

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty

Def: Dla $s \in (0,1)$, $p \geq 1$ definiujemy przestrzeń Gagliardo-Słobodeckiego (-Aronszajna) jako

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n/p+s}} \in L^p(\underset{(x,y)}{\underset{\Psi}{\Omega \times \Omega}}) \right\}$$

czyli $W^{s,p}(\Omega)$ to przestrzeń tych ~~f~~ $u \in L^p(\Omega)$, dla których $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy < \infty$.

$$\stackrel{..}{=} [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \; ; \quad [u]_{W^{s,p}(\Omega)}$$

to półnorma Gagliardo.

Na $W^{s,p}(\Omega)$ możemy wprowadzić normę

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \|u\|_p + [u]_{W^{s,p}}$$

i z tą normą $W^{s,p}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha.

Narzuca się pytanie: na ile to jest spójne ze znanymi nam przestrzeniami Sobolewa? Czy np. dla $s=1$ odtwarzamy $W^{1,p}(\Omega)$?

Nie bardzo:

Tw (Brézis, 2002) Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty i spójny, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i spełnia
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p}}\, dx\, dy < \infty.$$

Wówczas u jest stała p.w. na Ω.

Zadanie: wykazać tw. Brézisa przy dodatkowym założeniu, że u jest gładka.

Mamy jednak

Twierdzenie: jeżeli $u \in W^{1,p}(B)$, $s \in (0,1)$, to $(1-s)\,[u]^p_{W^{s,p}(B)} \le C(n,p)\, \|\nabla u\|^p_{L^p(B)}$.

Dowód: BSO możemy założyć, że $B = B(0,r)$.

$t = x-y \in B - B = 2B$

$$[u]^p_{W^{s,p}} = \int_B \int_B \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \le \int_{2B} dt \int_B \frac{|u(x+t)-u(x)|^p}{|t|^{n+sp}}\, dx$$

$$\le \int_{2B} dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\tilde{u}(x+t)-\tilde{u}(x)|^p}{|t|^{n+sp}}\, dx = \int_{2B} \frac{\|\tilde{u}(\cdot+t)-\tilde{u}(\cdot)\|_p^p\, dt}{|t|^{n+sp}}$$

$= (*)$

$\tilde{u}$ to rozszerzenie u na $\mathbb{R}^n$, z tw. Steina dostajemy $\lim_{s\to 1^-} |||u|||_{W^{s,p}} \simeq \|u\|_{W^{1,p}}$

$$\lim_{s\to 0^+} |||u|||_{W^{s,p}} \simeq \|u\|_{L^p}$$

<u>Wniosek z twierdzenia (i zadania)</u>

Jeżeli Ω ma brzeg jednostajnie lipszycowski, to $W^{1,p}(\Omega)\subset W^{s,p}(\Omega)$ dla wszystkich $s\in(0,1)$.

Znane są przykłady pokazujące, że bez założenia o regularności brzegu Ω ta inkluzja nie musi zachodzić.

Przestrzenie Gagliardo-Słobodeckiego definiujemy również dla $s>1$: oznaczając $[s]$ - część całkowita s
$\{s\} = s-[s]$ część ułamkowa

$$W^{s,p}(\Omega) = \Big\{u\in W^{[s],p}(\Omega):\ D^\alpha u\in W^{\{s\},p}(\Omega) \text{ dla wszystkich } \alpha \text{ tż } |\alpha|=[s]\Big\}$$

z normą

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \Big(\|u\|_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} [D^\alpha u]^p_{W^{\{s\},p}(\Omega)}\Big)$$

w ten sposób dla $s\in\mathbb{N}$ przestrzenie G.-S. odtwarzają znane nam przestrzenie Sobolewa (przyjmujemy, że dla $\{s\}=0$ tego składnika nie ma).

Przypomnijmy (ćwiczenia): dla $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$\|\tilde{u}(\cdot+t) - \tilde{u}(\cdot)\|_p \leq \|\nabla \tilde{u}\|_p \cdot |t|$, więc licząc dalej

$$(*) \leq \|\nabla \tilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \int_{2B} \frac{dt}{|t|^{n+(s-1)p}} = \|\nabla \tilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \int_0^2 \frac{n\omega_n r^{n-1}}{r^{n+(s-1)p}} dr$$

$$\leq C(n,p) \|u\|_{W^{1,p}(B)} \cdot \frac{n\omega_n 2^p}{p} \cdot \frac{1}{1-s} =$$

$$= \tilde{C}(n,p) \frac{\|u\|_{W^{1,p}(B)}}{1-s} \quad \square.$$

Bez trudu sprawdzamy, że ten sam dowód działa dla dowolnego <u>ograniczonego</u> Ω z brzegiem jednostajnie lipszycowskim;

<u>Zadanie</u>: udowodnić twierdzenie dla dow. Ω z brzegiem jedn. lipszyc.

w 2001 roku Bourgain, Brézis i Mironescu wykazali, że dla dowolnego otwartego, spójnego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mamy

$$\lim_{s \to 1^-} (1-s) [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = C \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

rok później, w 2002 roku, Maz'ya i Shaposhnikova: dla $u \in \bigcap_{s \in (0,1)} W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{s \to 0^+} s [u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

<u>Wniosek:</u> przyjmując na $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ równoważną normę

$$|||u|||_{W^{s,p}} = \left(\|u\|^p_p + s(1-s)[u]^p_{W^{s,p}} \right)^{1/p}$$

__Twierdzenie__: Dla dowolnego otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s, s' \in (0,1)$ t.ż. $0 < s \leq s' < 1$ i mierzalnego $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mamy

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C(n,s,p)\, \|u\|_{W^{s',p}}$$

(więc w szczególności $W^{s',p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$).

__Wniosek__: Jeżeli Ω ma brzeg jednostajnie lipszycowski, to $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ dla dowolnych $1 \leq s < s' < \infty$.

__Dowód twierdzenia__

Rozdzielmy całkę występującą w półnormie Gagliardo na dwie: wokół osobliwości i daleko od niej:

$$[u]^p_{W^{s,p}} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy = \left(\int_\Omega \int_{\Omega_1(y)} + \int_\Omega \int_{\Omega_2(y)} \right) (\ldots)\, dx\, dy$$

$$= I_1 + I_2$$

gdzie
$$\Omega_1(y) = \Omega \cap \{x : |x-y| < 1\}$$
$$\Omega_2(y) = \Omega \cap \{x : |x-y| \geq 1\}.$$

Mamy

$$I_1 = \int_\Omega \int_{\Omega_1(y)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \leq \int_\Omega\int_{\Omega_1(y)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}}\,dxdy$$

$$\leq \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}}\,dxdy = [u]_{W^{s',p}}$$

$$I_2 = \int_\Omega\int_{\Omega_2(y)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \overset{\text{wypukłość } t\mapsto t^p}{\leq} 2^{p-1}\int_\Omega\int_{\Omega_2(y)} \frac{|u(x)|^p+|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy$$

$$= 2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_{\Omega_2(y)} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy + \underbrace{\int_\Omega\int_{\Omega_2(y)} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy}\right)$$

zbiór całkowania jest symetryczny (niezmienniczy) wzgl. zamiany $x \leftrightarrow y$, która przeprowadza tę całkę w pierwszą.

$$= 2^p \int_\Omega\int_{\Omega_2(y)} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dxdy \leq 2^p \int_\Omega |u(x)|^p \int_{\{|z|\geq 1\}} \frac{dz}{|z|^{n+sp}}\,dz\,dx$$

$$= 2^p n\omega_n \frac{1}{n+sp-1} \|u\|_p^p = C(n,s,p)\|u\|_p^p .$$

Łącząc, dostajemy, że

$$\|u\|_{W^{s,p}} \simeq \left(\|u\|_p^p + [u]^p_{W^{s,p}}\right)^{1/p} \lesssim \left(\|u\|_p^p + [u]^p_{W^{s',p}}\right)$$

$$\simeq \|u\|_{W^{s',p}} .$$

Twierdzenie Sobolewa o włożeniu dla ułamkowych przestrzeni Sobolewa

Twierdzenie:

(1) Niech $sp < n$, $p \geq 1$, $s \in (0,1)$. Wówczas

$$\|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-sp}}(\mathbb{R}^n)} \overset{(*)}{\leq} C(n,p,s)\,[f]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

W szczególności $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$

dla wszystkich $q \in \left[p, \frac{np}{n-sp}\right]$

Uwagi do (1): • twierdzenie zachodzi dla dowolnego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ z brzegiem jednost. lipszycowskim, wystarczy sprawdzić, że tw. Steina o rozszerzaniu zachodzi również dla ułamkowego s;

• druga część tezy (1) wynika dla $q = \frac{np}{n-sp}$ z nierówności (*), dla $q = p$ z definicji $W^{s,p}$ a pozostałe q z interpolacji (tzn. z nier. Höldera).

(2) gdy $sp = n$, $p > 1$, $s \in (0,1)$ to $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich $q \geq p$.

(2') przy założeniach (2), $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$
$\subset VMO(\mathbb{R}^n)$

Uwagi do (2)

- jak poprzednio, teraz zachodzi też dla $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ z brzegiem jednost. lipszycowskim;

- dowody (1), (2) i (2') – najczęściej korzystają z identyfikacji przestrzeni $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ z szczególnymi przypadkami bardziej skomplikowanych przestrzeni Biesowa i z twierdzeń o włożeniu dla tych ostatnich, uzyskiwanych metodami teorii potencjału i teorii interpolacji.

Elementarny, choć długi i techniczny dowód (1) i (2) można znaleźć w „Hitchhiker's guide to fractional Sobolev spaces"
E. di Nezza, E. Valdinoci

(2') jest trudniejsze, odnośnik: J. van Schaftingen, J. Func. Anal. 2006.