# Teoria śladów

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $H \subset \mathbb{R}^n$ będzie hiperpłaszczyzną taką, że $\Omega \cap H \overset{ozn}{=} \Omega' \neq \emptyset$. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ni (x', x_n)$, $H = \{(x', x_n) : x_n = 0\}$, $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) : x_n > 0\}$.

Jeżeli $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, to $u$ można dowolnie zmieniać na zbiorach miary zero – trudno więc mówić o wartościach $u$, czy też obcięciu $u$ do $\Omega'$. Z drugiej strony mamy następującą obserwację:

Niech $K \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym i niech $r = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$; $K' = K \cap H$, $K^+ = K \cap \mathbb{R}^n_+$. Dalej, niech $L = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \frac{r}{2}\}$, wtedy $K \subset L \subset \Omega$. Znajdziemy też funkcję wycinającą $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taką, że $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ na $K$, $\operatorname{supp}\eta \subset L$, $\|\nabla\eta\|_\infty \le \frac{c}{r}$ (jak? zadanko).

Mamy

$$\int_{K'} |u|^p dx' \le \int_H \eta |u|^p dx' = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial}{\partial x_n}(\eta \cdot |u|^p) \cdot dx =$$

$$= -\int_{\substack{L^+ \\ \shortparallel \\ L \cap \mathbb{R}^n_+}} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_n} |u|^p + p|u|^{p-1} \operatorname{sgn} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \eta \right) dx \le \quad \Big\} \text{nier. Younga}$$

$$\le \frac{c}{r} \int |u|^p dx + C(p) \int_L (|u|^p + |\nabla u|^p) dx$$

$$= \frac{\tilde{C}(p)}{r} \int_L (|u|^p + |\nabla u|^p)\,dx, \quad \text{a więc}$$

$$\|u\|_{L^p(K')} \lesssim \|u\|_{W^{1,p}(L)}$$

Zatem dla każdej $u \in C^1(\Omega)$ normą (w $L^p$) jej obcięcia do $K'$ jest kontrolowana przez $W^{1,p}$-normę $u$ na nieco większym zbiorze zwartym $L$.

Gdyby nie nasze wcześniejsze zastrzeżenia, można by tu pospiesznie napisać, że

„z gęstości $C^1$ w $L^p_{loc}(\Omega')$ i $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ dostajemy, że $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \underset{\text{obcięcie}}{\hookrightarrow} L^p_{loc}(\Omega')$"

No, ale jak zauważyliśmy, dla $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ obcięcie $u$ do $\Omega'$ nie bardzo ma sens – a w każdym razie nie taki, jak dla funkcji ciągłych...

Wprowadźmy nieco ogólniejszy „setting":

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, który ma własność stożka wewnętrznego, dodatkowo założmy, że $\Omega$ jest ograniczony (te założenia można osłabiać - komentarze o tym później).

Dalej, niech $H \subset \mathbb{R}^n$ będzie $k$-wymiarową podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^n$ taką, że $\Omega' = \Omega \cap H \neq \emptyset$.

Chcemy sensownie zdefiniować obcięcie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ do $\Omega'$. Na razie mamy

$$W^{1,p} \cap C(\Omega) \ni u \xrightarrow{\Gamma} u|_{\Omega'} \in C(\Omega')$$

ale po prawej stronie chcielibyśmy mieć co najmniej jakąś przestrzeń Lebesgue'a, a po lewej - chcielibyśmy się pozbyć założenia o ciągłości $u$.

Jeżeli uda nam się na przykład dla jakiegoś $q \in [1, \infty)$ i wszystkich $u \in C^\infty \cap W^{1,p}(\Omega)$ udowodnić, że $\|u\|_{L^q(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

(a więc $\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega') \; (\cap C^\infty(\Omega'))$ jest ciągły), to przez gęstość będziemy mogli rozszerzyć operator liniowy $\Gamma$ na całe $W^{1,p}(\Omega)$.

Innymi słowy – „obcięcie" (które odtąd będziemy nazywać <u>śladem</u>) funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega)$ do $\Omega'$ otrzymujemy tak: • znajdujemy ciąg $u_m \in W^{1,p} \cap C^{\infty}(\Omega)$, $u_m \longrightarrow u$ w $W^{1,p}(\Omega)$

(••) zauważamy, że ciąg $u_m|_{\Omega'}$ funkcji ciągłych na $\Omega'$ jest zbieżny w $L^q(\Omega')$

i tę granicę nazywamy śladem $u$ na $\Omega'$

Pozostaje nam: • zidentyfikować $q$

• wykazać ciągłość

$$\Gamma : W^{1,p} \cap C^{\infty}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

resztę załatwi za nas tw. o rozszerzaniu operatora liniowego (czy ogólniej – funkcji jednost. ciągłej) ze zbioru gęstego.

<u>Twierdzenie</u> (Sobolewa dla śladów)

Niech $\Omega$, $H$, $\Omega'$, $\Gamma$ będą jak wyżej. Wówczas

A. Gdy $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\Gamma} L^q(\Omega')$ jest ciągły dla wszystkich $q \in [p, \infty]$

B. gdy $p = n$, $\Gamma$ jest ciągły dla wszystkich $q \in [p, \infty)$

C. gdy $n-k < p < n$, $\Gamma$ jest ciągły dla wszystkich $q \in [p, p^*]$, gdzie $p^* = \frac{kp}{n-p}$

Uwaga: Jeżeli zakładamy, że $\Omega$ jest ograniczony, to oczywiście $\Omega'$ ma skończoną k-wym. miarę (Hausdorffa czy Lebesgue'a, co kto woli), więc we wszystkich trzech przypadkach możemy zakres $q$ rozszerzyć (z $[p, ?]$) do $[1, 2]$.

Jak Państwo zauważą, cały dowód działa również dla $\Omega$ nieograniczonych, gdy założymy, że $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m$ i każdy z $\Omega_i$ jest gwiaździsty wzgl. pewnej kuli $B_i$ (a więc np. gdy $\Omega$ jest wypukły) — ale wtedy dolne ograniczenie zakresów $q$ ma być $p$, nie $1$.

Gdy $\Omega$ jest ograniczony i ma własność stożka, to $\Omega$ jest sumą (skończoną) $\Omega_i$, gwiaździstych wzgl. pewnych kul $B_i$ — mówiliśmy o tym przy okazji nier. Poincaré.

Dowód A.

Jak wspomniałem wyżej, $\Omega = \bigcup_{i=}^{m}$ [illegible]

$\Omega_i$ gwiaździsty wzgl. kuli [illegible],

$\Omega_i' = $ [illegible] $H$, $\Omega' = \bigcup_{i=}$ [illegible].

Dla $x \in \Omega_i$ i $u \in C^\infty \cap W^{1,p}(\Omega_i)$ mamy formułę reprezentacyjną

$$|u(x) - u_{B_i}| \leq C \int_{\Omega_i} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy \overset{\text{Hölder}}{\leq} C \left( \int_{\Omega_i} |\nabla u(y)|^p \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega_i} \frac{dy}{|x-y|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega_i)} |\Omega_i|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}}$$

co dowodzi, że $|u(x)| \leq \frac{1}{|B_i|} \|u\|_{L^p(B_i)} + C(n,p,\Omega_i) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega_i)}$

$$\leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

a więc $u$ jest ograniczone na $\Omega_i'$ (więc i na $\Omega'$)

(w zasadzie, dla ~~$\Omega$~~ ograniczonych to już wiedzieliśmy, bo z tw. Morreya, $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, więc jeżeli $\Omega$ jest ograniczony, to funkcja hölderowska na nim jest ograniczona; dla $\Omega$ nieograniczonych, które są skończonymi sumami zbiorów gwiaździstych wzgl. kul, trzeba postępować j.w.).

Stąd $\|u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ ← a precyzyjniej, $u|_{\Omega'} \equiv \Gamma(u)$

dla $u \in C^\infty \cap W^{1,p}(\Omega)$, co przez gęstość pociąga za sobą dowód, że $\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^\infty(\Omega')$ jest ciągłe.

Dla $\Omega$ ograniczonych to wystarczy, bo $L^\infty(\Omega') \subset L^q(\Omega')$ dla każdego $q$.

Dla $\Omega$ nieograniczonych trzeba jeszcze wykazać, że ~~ta~~ $u|_{\Omega'} \in L^p(\Omega')$, co zostawiam jako proste ćwiczenie (wskazówka: wystarczy to wykazać dla $\Omega_i'$ w miejsce $\Omega'$, a $\Omega_i'$ jest gwiaździsty wzgl. kuli).

Teraz przypadek C.

Tu jest trudniej i potrzebujemy dodatkowych definicji i lematów.

Def: Niech $J_r f(x) = \int_{B_r(x)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy$ będzie lokalnym potencjałem Riesza,

$J_\infty = I_1$.

Lemat 1: Jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > n-k$, to $J_r|f||_H \in L^p(H)$ i $\| J_r |f| \|^p_{L^p(H)} \leq C\, r^{p-(n-k)} \| f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

## Dowód lematu

Mamy $\mathcal{I}_r|f|(x) = \int\limits_{B_r(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy = \int\limits_{B_r(x)} \frac{|f(y)|\,dy}{|x-y|^s\,|x-y|^{n-s-1}}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int\limits_{B_r(x)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{sp}}\,dy\right)^{1/p} \underbrace{\left(\int\limits_{B} \frac{dy}{|x-y|^{(n-s-1)\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}$$

$s$ ustalimy później (albo i nie)

i ta całka jest zbieżna, o ile $s > \frac{n}{p} - 1$, można ją wyliczyć we wsp. biegunowych

$$= C\cdot\left(\int\limits_{B_r(x)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{sp}}\right)^{1/p} r^{s+1-\frac{n}{p}}.$$

Stąd $\int\limits_H (\mathcal{I}_r|f|(x))^p\,dx' = C r^{(s+1-\frac{n}{p})p} \int\limits_H \int\limits_{B_r(x)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{sp}}\,dy\,dx'$

dalej $H = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : x_n = 0\}$

$$= C r^{(s+1-\frac{n}{p})p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_H \frac{dx' \cdot \chi_{\{|x-y|\leq r\}}}{|(x',0)-(y',y_n)|^{sp}}\right) |f(y)|^p\,dy$$

$$\leq C r^{(s+1-\frac{n}{p})p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \underbrace{\left(\int\limits_{H\cap B_r(y',0)} \frac{dx'}{|(x',0)-(y',0)|^{sp}}\right)} dy =$$

i to można obliczyć we współrz. radialnych w $k$ wymiarach, na $H$, o ile $sp < k$

$| = C\cdot r^{k-sp}$.

$$= C r^{sp+p-n+k-sp} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C r^{k+p-n} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Trzeba tylko jeszcze sprawdzić, że $s$ spełniające warunki $s > \frac{n}{p} - 1$ i $sp < k$ znajdziemy wtedy i tylko wtedy, gdy $p > n-k$.

Zostawię to Państwu.

$\square$.

Def: Przestrzeń Marcinkiewicza $M^p(\mathbb{R}^n)$ (lub, jak wolą inni, słaba przestrzeń Lebesgue'a $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ to przestrzeń tych $f$ mierzalnych na $\mathbb{R}^n$, że

istnieje $C > 0$ t.że $\forall_{t>0}$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}| < \frac{C}{t^p}$$

infimum takich $C$ to quasinorma w $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.

(uwaga: quasi, bo nie działa nierówność trójkąta).

Uwagi ~~Ćwiczenie~~:

- $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq M^p(\mathbb{R}^n)$
- $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Mf \in M^1(\mathbb{R}^n)$.

Analogicznie definiujemy $M^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie:

- $\forall_{p>1}$, jeżeli $|\Omega| < \infty$, to

$$L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega) \subset \bigcap_{q<p} L^q(\Omega)$$

- wykazać, że dla $\Omega = B$ żadna z inkluzji nie jest równością.

Lemat 2

Jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, to $I_1|f|\big|_H \in M^{\frac{kp}{n-p}}(H)$,

$$\lambda_k(\{x \in H : I_1|f|(x) > t\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{t}\right)^{\frac{kp}{n-p}}$$

Dowód:

Stosując nier. Höldera z wykł. $p, \frac{p-1}{p}$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \leq C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \|f\|_p$$

Ustalmy $t > 0$ i niech $r$ będzie takie, że

$$\frac{t}{2} = C_1 r^{1-\frac{n}{p}} \|f\|_p .$$

Wtedy $J_r(|f|)(x) = I_1(|f|)(x) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy$,

więc jeżeli $I_1(|f|)(x) > t$, to $J_r(|f|)(x) > \frac{t}{2}$.

Stąd

$$\lambda_k(\{x \in H : I_1(|f|)(x) > t\}) \leq \lambda_k(\{x \in H : J_r(|f|)(x) > \tfrac{t}{2}\}) = (*).$$

i z Lematu 1 i nier. Markowa

$$(*) \leq \frac{\| J_r(|f|) \|^p_{L^p(H)}}{(t/2)^p} \leq \frac{r^{p-(n-k)} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{(t/2)^p}$$

$$= C \frac{r^{p-(n-k)} \|f\|_p^p}{r^{p-n} \|f\|_p^p} = C r^k = C\left(\frac{t}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{kp}{p-n}} =$$

$$= C\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^{\frac{kp}{n-p}}$$

$\square$.

Stąd dowód C.

Jak poprzednio, $\Omega = \bigcup_{j\geq 1}^{m} \Omega_j$ i dla $x \in \Omega_j$ mamy formułę reprezentacyjną:

$$|u(x)| \leq |u_{B_j}| + I_1(|\nabla u| \cdot \chi_{\Omega_j})(x)$$

Z Lematu 2, $I_1(|\nabla u| \chi_{\Omega_j})\Big|_H \in M^{p^*}_{\#}(H)$, $p^* = \frac{kp}{n-p}$

więc $u|_{\Omega_j'} \in M^{p^*}(\Omega_j')$ i $\|u\|_{M^{p^*}(\Omega_j')} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_j)}$

$$\Rightarrow \|u\|_{M^{p^*}(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Stąd dostajemy (ćwiczenie), że $u|_{\Omega'} \in L^q(\Omega')$ dla wszystkich $q < p^*$.

Dowód, że $u|_{\Omega'} \in L^{p^*}(\Omega')$ jest trudniejszy i go sobie odpuszczę (ref: Adams & Fournier)

<u>Przypadek B.</u> $p = n$, $\Omega$ ograniczony

Weźmy dowolne $s < n$. Jeżeli ~~że~~ $u \in W^{1,n}(\Omega)$, to $u \in W^{1,s}(\Omega) \Rightarrow \underbrace{u|_{\Omega'}}_{\text{czy też } \Gamma(u)} \in L^{s^*}(\Omega')$

$$s^* = \frac{k}{n-s}$$

Biorąc $s \to n$ dostajemy $s^* \to \infty$, więc w ten sposób dostajemy, że $\Gamma(u) \in L^q(\Omega')$ dla dowolnego $q < \infty$.