Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1,\ |2y| - x \leq 0\}$

i) wykaż, że A jest zbiorem wypukłym

ii) wyznacz stożek kierunków dopuszczalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

iii) wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

---

i) Zapiszmy A w nieco innej postaci, przekształcając warunek $|2y| - x \leq 0$ na dwa warunki: $2y - x \leq 0$ i $-2y - x \leq 0$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0,\ 2y - x \leq 0,\ -2y - x \leq 0\}$$

Oznaczmy
$$g_1(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1,$$
$$g_2(x,y) = -x + 2y,$$
$$g_3(x,y) = -x - 2y.$$

Funkcje g_2 i g_3 są wypukłe, bo są funkcjami liniowymi. Czy g_1 jest wypukła?

$\nabla g_1(x,y) = (2x, 4y)$ $\quad$ $D^2 g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$D^2 g_1(x,y)$ jest dodatnio określona dla dowolnych (x,y), więc g_1 jest wypukła. ~~dla do~~

Stąd $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x,y) \leq 0\}$ jest zbiorem wypukłym, analogicznie wypukłe są zbiory $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_2(x,y) \leq 0\}$ i $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_3(x,y) \leq 0\}$

Ostatecznie zbiór $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ jest wypukły jako część wspólna trzech zbiorów wypukłych.

ii) Zbadajmy najpierw aktywność więzów g_1, g_2 i g_3 w punkcie $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$g_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{2\cdot 1}{16} - 1 = -\frac{5}{8} < 0$$

więz nieaktywny

$$g_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 0 \quad \text{więz aktywny}$$

$$g_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4} = -1 < 0 \quad \text{więz nieaktywny.}$$

Aktywny jest tylko więz g_2 (a dwa pozostałe są w $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ mniejsze od 0, więc $z \in A$),

zatem $F_A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = F_{A_2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Zbiór A_2 jest zadany nierównością na funkcji liniowej, ~~za~~ jest więc półpłaszczyzną.

$$T_{A_2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left\{(v,w) \in \mathbb{R}^2 : \left\langle (v,w), \nabla g_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right\rangle \leq 0\right\}$$

$$= \left\{(v,w) \in \mathbb{R}^2 : \langle (v,w), (-1,2)\rangle \leq 0\right\} =$$

$$= \left\{(v,w) \in \mathbb{R}^2 : -v + 2w \leq 0\right\}.$$

Dzięki temu, że A_2 jest półpłaszczyzną, wiemy, że $F_{A_2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = T_{A_2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

a $F_A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = F_{A_2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left\{(v, w) \in \mathbb{R}^2 : -v + 2w \leq 0\right\}$

iii) Które więzy są aktywne w $z = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$?

$$g_1\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} - 1 = 0$$

więz aktywny

$$g_2\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{6}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$ więz aktywny

$$g_3\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{6}} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{6}} < 0$$ więz nieaktywny

~~Stąd~~ Zauważmy też, że $\nabla g_1\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ i $\nabla g_2\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = (-1, 2)$ są liniowo niezależne $\left(\begin{vmatrix} 4/\sqrt{6} & 4/\sqrt{6} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$, więc w z spełniony jest warunek jakości więzów. Stąd (Tw. 56 ze skryptu i okolice)

$$T_A\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left\langle (x,y), \nabla g_1\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle \leq 0, \left\langle (x,y), \nabla g_2\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle \leq 0\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4}{\sqrt{6}}x + \frac{4}{\sqrt{6}}y \leq 0, -x + 2y \leq 0\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0, -x + 2y \leq 0\right\}$$

$$N_A\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left\{\cancel{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :} \lambda \nabla g_1\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \mu \nabla g_2\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) : \lambda, \mu \geq 0\right\}$$

$$= \left\{\lambda\left(\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right) + \mu(-1, 2) : \lambda, \mu \geq 0\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\lambda - \mu, \frac{4}{\sqrt{6}}\lambda + 2\mu\right) : \lambda, \mu \geq 0\right\}.$$