

Zadania z EON – zestaw 10.

Zadanie 1 Wyznacz najbliższy i najdalszy punkt zbioru

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

od punktu $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Zadanie 2 Pewna ciepłownia może do produkcji wykorzystywać bądź węgiel, bądź gaz ziemny, bądź oba (ma dwa różne piece). Ilość wyprodukowanej przez nią podgrzanej wody (w tys. litrów) dana jest przez funkcję $F(x, y)$, gdzie x to ilość zużytego węgla, zaś y — gazu ziemnego. Węgiel kosztuje p złotych, a gaz — q złotych za tonę. Zużycie jednej tony węgla czynnika powoduje uwolnienie do środowiska ϕ , a jednej tony gazu — ψ kilogramów dwutlenku siarki. Firma chce zminimalizować koszty, spełniając równocześnie następujące warunki:

- wyprodukuje co najmniej a tys. litrów podgrzanej wody,
- zatruje środowisko nie więcej niż b kilogramami dwutlenku siarki.

Jak wyglądają warunki konieczne KKT na poszukiwane minimum? Rozwiąż je, przyjmując $F(x, y) = x^2 + 2y^2$, $p = 500$ zł, $q = 1000$ zł, $a = 10000$, $\phi = 10$ kg, $\psi = 2$ kg, $b = 500$.

Zadanie 3 Znajdź maksimum i minimum funkcji $f(x, y) = xy^2$ na zbiorze

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Zadanie 4 Znajdź minimum funkcji $f(x, y) = -(x - 4)^2 - (y - 4)^2$ na zbiorze

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4, x \leq 2y, 3x \geq y\}.$$

Zadanie 5 Znajdź maksimum i minimum funkcji $f(x, y) = xy$ na zbiorze

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 1, y \geq -1\}.$$