Zadanie 1. Rozważ funkcję $f(x,y) = (x+y)(x+6)(-y-3)$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (-3,0)$, $B = (1,2)$, $C = (-6,-3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.

(iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (3,2)$, $E = (3,-3)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 2. Rozważ funkcję afiniczną $f(x,y,z) = 2x - 3y + z - 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x+y+1| \leqslant 2, y \geqslant -3, y - 2x \leqslant 0, |x+y-z| \leqslant 5\}.$$

(i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.

(ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X.

(iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X.

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 3. Rozważ funkcję $f(x,y) = \max\{4x^2 + y^2, 5x + 3y + 3, 3x - 4y + 6\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.

(ii) (6pt) Oblicz subróżniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (-3/5, 3/5)$, $B = (1,4)$, $C = (-1,2)$ i $D = (1,-2)$.

(iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w $\mathbb{R}^2$, w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 4. Niech

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + 2y^2 \leqslant 1, \ |2y| - x \leqslant 0\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}})$.

Zadanie 5. Rozważ funkcję $f(x,y,z) = y^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leqslant 1, \ y + z = 0, \ x + 2y + z \geqslant 0\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1,1,-1)$, $B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B, na maksimum w A)?

Zadanie 6. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - y^2 = 1, \ y^2 + z^2 = 1\}$, zaś $f(x,y,z) = x^2 + y$ będzie funkcją określoną na zbiorze A.

(i) (2pt) Sprawdź warunek jakości więzów dla zadania optymalizacji funkcji f na zbiorze A.

(ii) (8pt) Znajdź minimum i maksimum funkcji f na A.

Zadanie 7. Rozważ funkcję $f(x,y) = (2x+y)(x+1)(y+1)$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (6pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f;

(ii) (2pt) Zbadaj czy w punktach $A = (-1/2, 0), B = (-1/2, 1/2)$ funkcja f przyjmuje minimum lokalne;

(iii) (2pt) Zbadaj czy w punktach $C = (-1,-1), D = (-1,2)$ funkcja f przyjmuje minimum maksimum lokalne.

Polecenia opcjonalne 1. (iv) Czy funkcja f przyjmuje na $\mathbb{R}^2$ minimum lub maksimum globalne?

Zadanie 8. Rozważ funkcję liniową $f(x,y,z) = -x + y + 2z + 2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leqslant 3, \min\{x-1, y, z+1\} \geqslant 0\}.$$

(i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły;

(ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty;

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X;

(iv) (2pt) Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze X;

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 9. Rozważ funkcję $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, 13x + 7y + 20, 3x + 3y + 20\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą;

(ii) (6pt) Wyznacz subróżniczki ∂f funkcji f w punktach

$$A = (-10, 10), \qquad B = (-2,-2), \qquad C = (-2, 5);$$

(iii) (2pt) Czy w którymś z punktów A, B, C funkcja f przyjmuje minimum lokalne? Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje minimum globalne?

Zadanie 10. Rozważ zbiór

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y \leqslant 0, \ |2x - y - 5| + 3|x + 2y| \leqslant 25\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(Z)$ w punkcie $Z = (1/3, -13/3)$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(U)$ i normalny $N_A(U)$ w punkcie $U = (5, -5)$.

Zadanie 11. Rozważ funkcję $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y-z)^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 2xy + y - z \leqslant 1, \ x + 2y - z = 0, \ 3x + 3y - z \geqslant 0\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 2, 3)$, $B = (1/2, -1, -3/2)$, $C = (0, 1/2, 1)$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B, na maksimum w A)?

Zadanie 12. Rozważ funkcję $f(x, y) = (x + y)(x + 6)(-y - 3)$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (-3, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-6, -3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.

(iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (3, 2)$, $E = (3, -3)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 13. Rozważ funkcję afiniczną $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y + 1| \leqslant 2, y \geqslant -3, y - 2x \leqslant 0, |x + y - z| \leqslant 5\}.$$

(i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.

(ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X.

(iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X.

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 14. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{4x^2 + y^2, 5x + 3y + 3, 3x - 4y + 6\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.

(ii) (6pt) Oblicz subróżniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (-3/5, 3/5)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 2)$ i $D = (1, -2)$.

(iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w $\mathbb{R}^2$, w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 15. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + 2y^2 \leqslant 1,\ |2y| - x \leqslant 0\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Zadanie 16. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leqslant 1,\ y + z = 0,\ x + 2y + z \geqslant 0\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 1, -1)$, $B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B, na maksimum w A)?

Zadanie 17. Rozważ funkcję $f(x, y) = (x + 7)(y - 3)(x - y + 1)$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (0, -2)$, $B = (-4, 0)$, $C = (-7, 3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.

(iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (2, 3)$, $E = (2, -2)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 18. Rozważ funkcję afiniczną $f(x, y, z) = 2x + y + 3z + 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - z + 2| \leqslant 2, z \leqslant 3, 2x + z \geqslant -2, |x - y - z + 1| \leqslant 5\}.$$

(i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.

(ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X.

(iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X.

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 19. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{x^2 + 4y^2, 3x + 5y + 3, -4x + 3y + 6\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.

(ii) (6pt) Oblicz subróżniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (4, 1)$, $B = (\frac{3}{5}, -\frac{3}{5})$, $C = (2, -1)$ i $D = (-2, 1)$.

(iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w $\mathbb{R}^2$, w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 20. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 2x^2 + y^2 \leqslant 1, \ |2x| - y \leqslant 0\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.

Zadanie 21. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 + z^2 \leqslant 1, \ x + z = 0, \ x + y + 2z \geqslant 0\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, -1, 1)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B, na maksimum w A)?

Zadanie 22.

1. Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-2y^2}$ i ustal, czy funkcja f przyjmuje w nich minimum lokalne, maksimum lokalne, czy punkt siodłowy.

2. Oblicz $f'_{(1,2)}(0, 0)$.

Zadanie 23. Znajdź (dowolną, byle poprawną metodą) najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = 2x - y^2 - z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - y = 2,\ z^2 = 1,\ |x| \leqslant 2\}.$$

Zadanie 24. Produkcja pewnej firmy zależy od liczby zatrudnionych pracowników (n) oraz od liczby godzin, jaką każdy z nich przepracuje tygodniowo (k). Funkcja produkcji (wyrażona w sztukach towaru) ma postać

$$f(n, k) = 50\frac{nk}{n + 2k}.$$

Koszty jakie ponosi firma w związku z zatrudnieniem n pracowników, każdego na k godzin tygodniowo, to $K(n, k) = nk + n$. Wyznacz minimalny koszt, jaki trzeba ponieść, by wyprodukować 144 sztuki towaru.

Zadanie 25. Rozważ zagadnienie poszukiwania największej wartości funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - z^2$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z \leqslant 10,\ x^2 + y^2 \leqslant 1, z \geqslant 1\}.$$

1. Czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą na zbiorze A? Odpowiedź uzasadnij.

2. Sprawdź warunek jakości więzów dla tego zadania.

3. Wypisz warunki konieczne KKT dla tego zadania. Sprawdź, w których z wymienionych poniżej punktów są spełnione:

$$(0, 1, 1), \quad (0, -1, 1), \quad (1, 1, \sqrt{2}), \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1).$$

Zadanie 26. Wykaż, że zbiór

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| + |y| \leqslant 4,\ \max\{|x|, |y|\} \leqslant 3,\ x + z \leqslant 2, y + z \geqslant -1\}$$

jest wypukły i zwarty oraz wskaż zbiór jego punktów ekstremalnych.

Zadanie 27. Rozważ funkcję $f(x, y) = e^4(x^2 + y^2) - e^{y^2-x^2} + 1$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f.

(ii) (4pt) Zbadaj, w których z nich funkcja ma minimum, a w których maksimum lokalne.

(iii) (1pt) Czy f przyjmuje na $\mathbb{R}^2$ minimum globalne? A maksimum globalne?

Zadanie 28. Rozważ funkcję afiniczną $f(x,y,z) = x + 2y + 3z - 1$ określoną na zbiorze

$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \min\{z-x, z+y\} \geqslant z, \max\{-3x+2y+2z, -3x+2y-6z\} \leqslant 6, x^3 \leqslant 0\}$.

(i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.

(ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.

(iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X.

(iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X.

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 29. Rozważ funkcję $f(x,y) = \max\{x^2 - y, x^2 + y, x^2 + y^2\}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.

(ii) (6pt) Wyznacz subróżniczkę $\partial f(x,y)$ funkcji f dla wszystkich $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w $\mathbb{R}^2$, w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 30. Niech

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 2x + y \geqslant x^2 + 1, |x - y| \leqslant 1\}.$$

(i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.

(ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (2,1)$.

(iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (3,4)$.

Zadanie 31. Rozważ funkcję $f(x,y,z) = x^2 + z^2 + 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x = 0, x^2 + z^2 + 2y \leqslant 4, y + z \geqslant 2x\}.$$

(i) (3pt) Czy w punktach $A = (-2,-2,-2)$, $B = (1,1,1)$, $C = (0,1,0)$ spełniony jest warunek jakości więzów?

(ii) (4pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?

(iii) (4pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?

(iv) (4pt) Czy punkcie C spełnione są warunki dostateczne KKT na minimum? Czy w punkcie B spełnione są warunki dostateczne KKT na maksimum?