

Zadanie 1. Rozważ funkcję $f(x, y) = (x + y)(x + 6)(-y - 3)$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f .
- (ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (-3, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-6, -3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.
- (iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (3, 2)$, $E = (3, -3)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 2. Rozważ funkcję afiniczną $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y + 1| \leq 2, y \geq -3, y - 2x \leq 0, |x + y - z| \leq 5\}.$$

- (i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.
- (ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.
- (iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X .
- (iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X .

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 3. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{4x^2 + y^2, 5x + 3y + 3, 3x - 4y + 6\}$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.
- (ii) (6pt) Oblicz subgraniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (-3/5, 3/5)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 2)$ i $D = (1, -2)$.
- (iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w \mathbb{R}^2 , w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 4. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1, |2y| - x \leq 0\}.$$

- (i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.
- (ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
- (iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}})$.

Zadanie 5. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leq 1, y + z = 0, x + 2y + z \geq 0\}.$$

- (i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 1, -1)$, $B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?
- (ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?
- (iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?
- (iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B , na maksimum w A)?

Zadanie 6. Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1\}$, zaś $f(x, y, z) = x^2 + y$ będzie funkcją określoną na zbiorze A .

- (i) (2pt) Sprawdź warunek jakości więzów dla zadania optymalizacji funkcji f na zbiorze A .
- (ii) (8pt) Znajdź minimum i maksimum funkcji f na A .

Zadanie 7. Rozważ funkcję $f(x, y) = (2x + y)(x + 1)(y + 1)$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (6pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f ;
- (ii) (2pt) Zbadaj czy w punktach $A = (-1/2, 0), B = (-1/2, 1/2)$ funkcja f przyjmuje minimum lokalne;
- (iii) (2pt) Zbadaj czy w punktach $C = (-1, -1), D = (-1, 2)$ funkcja f przyjmuje minimum maksimum lokalne.

Polecenia opcjonalne 1. (iv) Czy funkcja f przyjmuje na \mathbb{R}^2 minimum lub maksimum globalne?

Zadanie 8. Rozważ funkcję liniową $f(x, y, z) = -x + y + 2z + 2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 3, \min\{x - 1, y, z + 1\} \geq 0\}.$$

- (i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły;
- (ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty;
- (iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X ;
- (iv) (2pt) Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze X ;

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 9. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{x^2 + y^2, 13x + 7y + 20, 3x + 3y + 20\}$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą;
- (ii) (6pt) Wyznacz subgraniczki ∂f funkcji f w punktach

$$A = (-10, 10), \quad B = (-2, -2), \quad C = (-2, 5);$$

- (iii) (2pt) Czy w którymś z punktów A, B, C funkcja f przyjmuje minimum lokalne? Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje minimum globalne?

Zadanie 10. Rozważ zbiór

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y \leq 0, |2x - y - 5| + 3|x + 2y| \leq 25\}.$$

- (i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.
- (ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(Z)$ w punkcie $Z = (1/3, -13/3)$.
- (iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(U)$ i normalny $N_A(U)$ w punkcie $U = (5, -5)$.

Zadanie 11. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y - z)^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 2xy + y - z \leq 1, x + 2y - z = 0, 3x + 3y - z \geq 0\}.$$

- (i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 2, 3)$, $B = (1/2, -1, -3/2)$, $C = (0, 1/2, 1)$ spełniony jest warunek jakości więzów?
- (ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?
- (iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?
- (iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B , na maksimum w A)?

Zadanie 12. Rozważ funkcję $f(x, y) = (x + y)(x + 6)(-y - 3)$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f .
- (ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (-3, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-6, -3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.
- (iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (3, 2)$, $E = (3, -3)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 13. Rozważ funkcję afiniczną $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y + 1| \leq 2, y \geq -3, y - 2x \leq 0, |x + y - z| \leq 5\}.$$

- (i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.
- (ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.
- (iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X .
- (iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X .

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 14. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{4x^2 + y^2, 5x + 3y + 3, 3x - 4y + 6\}$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.
- (ii) (6pt) Oblicz subgraniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (-3/5, 3/5)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 2)$ i $D = (1, -2)$.
- (iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w \mathbb{R}^2 , w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 15. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1, |2y| - x \leq 0\}.$$

- (i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.
- (ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
- (iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Zadanie 16. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leq 1, y + z = 0, x + 2y + z \geq 0\}.$$

- (i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, 1, -1)$, $B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?
- (ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?
- (iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?
- (iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B , na maksimum w A)?

Zadanie 17. Rozważ funkcję $f(x, y) = (x + 7)(y - 3)(x - y + 1)$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (5pt) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f .
- (ii) (3pt) Zbadaj, czy w punktach $A = (0, -2)$, $B = (-4, 0)$, $C = (-7, 3)$ funkcja f ma maksimum lokalne.
- (iii) (2pt) Zbadaj, czy w punktach $D = (2, 3)$, $E = (2, -2)$ funkcja f ma minimum lokalne.

Zadanie 18. Rozważ funkcję afiniczną $f(x, y, z) = 2x + y + 3z + 1$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - z + 2| \leq 2, z \leq 3, 2x + z \geq -2, |x - y - z + 1| \leq 5\}.$$

- (i) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest wypukły.
- (ii) (2pt) Wykaż, że zbiór X jest zwarty.
- (iii) (4pt) Podaj zbiór punktów ekstremalnych zbioru X .
- (iv) (2pt) Znajdź maksimum i minimum funkcji f na zbiorze X .

Uzasadnienia punktów (i)-(iii) mogą opierać się na dobrze wykonanym rysunku.

Zadanie 19. Rozważ funkcję $f(x, y) = \max\{x^2 + 4y^2, 3x + 5y + 3, -4x + 3y + 6\}$ określoną na zbiorze \mathbb{R}^2 .

- (i) (2pt) Sprawdź, czy f jest funkcją wypukłą.
- (ii) (6pt) Oblicz subgraniczkę ∂f funkcji f w punktach $A = (4, 1)$, $B = (\frac{3}{5}, -\frac{3}{5})$, $C = (2, -1)$ i $D = (-2, 1)$.
- (iii) (2pt) Podaj wszystkie punkty w \mathbb{R}^2 , w których funkcja f przyjmuje lokalne minimum. Czy w którymś z tych punktów f przyjmuje również globalne minimum?

Zadanie 20. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 1, |2x| - y \leq 0\}.$$

- (i) (1pt) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym.
- (ii) (3pt) Wyznacz stożek kierunków osiągalnych $F_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
- (iii) (6pt) Wyznacz stożek styczny $T_A(z)$ i normalny $N_A(z)$ w punkcie $z = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.

Zadanie 21. Rozważ funkcję $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ określoną na zbiorze

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 + z^2 \leq 1, x + z = 0, x + y + 2z \geq 0\}.$$

- (i) (3pt) Czy w punktach $A = (-1, -1, 1)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ spełniony jest warunek jakości więzów?
- (ii) (5pt) Czy w punkcie B spełnione są warunki konieczne KKT na minimum?
- (iii) (5pt) Czy w punkcie A spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum?
- (iv) (2pt) Czy punkcie A lub B są spełnione warunki dostateczne KKT (na minimum w B , na maksimum w A)?

Zadanie 22.

1. Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - 2y^2}$ i ustal, czy funkcja f przyjmuje w nich minimum lokalne, maksimum lokalne, czy punkt siodłowy.
2. Oblicz $f'_{(1,2)}(0, 0)$.

Zadanie 23. Znajdź (dowolną, byle poprawną metodą) najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = 2x - y^2 - z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2, z^2 = 1, |x| \leq 2\}.$$

Zadanie 24. Produkcja pewnej firmy zależy od liczby zatrudnionych pracowników (n) oraz od liczby godzin, jaką każdy z nich przepracuje tygodniowo (k). Funkcja produkcji (wyrażona w sztukach towaru) ma postać

$$f(n, k) = 50 \frac{nk}{n + 2k}.$$

Koszty jakie ponosi firma w związku z zatrudnieniem n pracowników, każdego na k godzin tygodniowo, to $K(n, k) = nk + n$. Wyznacz minimalny koszt, jaki trzeba ponieść, by wyprodukować 144 sztuki towaru.

Zadanie 25. Rozważ zagadnienie poszukiwania największej wartości funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - z^2$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 1\}.$$

1. Czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą na zbiorze A ? Odpowiedź uzasadnij.
2. Sprawdź warunek jakości więzów dla tego zadania.
3. Wypisz warunki konieczne KKT dla tego zadania. Sprawdź, w których z wymienionych poniżej punktów są spełnione:

$$(0, 1, 1), \quad (0, -1, 1), \quad (1, 1, \sqrt{2}), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Zadanie 26. Wykaż, że zbiór

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq 4, \max\{|x|, |y|\} \leq 3, x + z \leq 2, y + z \geq -1\}$$

jest wypukły i zwarty oraz wskaż zbiór jego punktów ekstremalnych.