Zadanie 4 Rozważ zagadnienie poszukiwania największej wartości funkcji $f(x,y,z) = x^2 + y^4 - z^2$ na zbiorze

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z \leqslant 10,\, x^2+y^2 \leqslant 1, z \geqslant 1\}.$$

a) Czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą na zbiorze A? Odpowiedź uzasadnij.

b) Sprawdź warunek jakości więzów dla tego zadania.

c) Wypisz warunki konieczne KKT dla tego zadania. Sprawdź, w których z wymienionych poniżej punktów są spełnione:

$$(0,1,1), \quad (0,-1,1), \quad (1,1,\sqrt{2}), \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1).$$

Rozwiązanie:

a) Wykażę, że zbiór A jest zwarty (jeżeli tak jest, to na mocy Tw. Weierstrassa funkcja f, która jako wielomian jest ciągła, przyjmuje na nim zarówno wartość najmniejszą, jak i największą).

Zbiór A jest domknięty, gdyż jest opisany nieostrymi nierównościami na funkcjach ciągłych. Czy jest ograniczony? Z nierówności $x^2+y^2 \leqslant 1$ wiemy, że jeżeli $(x,y,z) \in A$, to $|x| \leqslant \sqrt{10}$ oraz $|y| < \sqrt{10}$, czyli pierwsze dwie współrzędne punktu leżącego w A są ograniczone. Pozostaje pytanie o współrzędną z. Wiemy jednak, że $z \geqslant 1$, a z podanych przed chwilą ograniczeń na x i y mamy też oszacowanie na z z góry: $z \leqslant 10 - x - y \leqslant 10 + 2\sqrt{10}$. Tak więc wszystkie współrzędne są w zbiorze A ograniczone, tak więc A jest ograniczony.

b) Warunek jakości więzów.
Zbiór A jest opisany warunkami

$$g_1(x,y,z) = x+y+z-10 \leqslant 0$$
$$g_2(x,y,z) = x^2+y^2-1 \leqslant 0$$
$$g_3(x,y,z) = 1-z \leqslant 0$$

Ich gradienty to

$$\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,1)$$
$$\nabla g_2(x,y,z) = (2x,2y,0)$$
$$\nabla g_3(x,y,z) = (0,0,-1).$$

Zbadajmy najpierw punkty, w których tylko jeden z więzów jest aktywny – wtedy odpowiedni gradient ma być różny od zera. Jedynie gradient g_2 może być równy zeru, w punktach postaci $(0,0,z)$, ale w tych punktach wiąz g_2 jest nieaktywny.

Gradienty więzów g_1 i g_3 są zawsze liniowo niezależne, podobnie, poza rozpatrzonym już przypadkiem $x = y = 0$, gradienty g_1 i g_2 oraz g_2 i g_3. Pozostaje przypadek, gdy wszystkie 3 więzy są aktywne, a więc $x+y+z = 10$, $x^2+y^2 = 1$, $z = 1$. Łatwo widać, że ten układ równań nie ma jednak rozwiązań (nie ma zatem punktu, w którym wszystkie więzy są aktywne).

Tak więc warunek jakości więzów nigdy nie zawodzi.

c) Warunki konieczne KKT:
Mamy $\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y^3, -2z)$, więc warunek Lagrange'a ma postać

$$(2x, 4y^3, -2z) - \lambda_1(1,1,1) - \lambda_2(2x,2y,0) - \lambda_3(0,0,-1) = (0,0,0),$$

co daje

$$\begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2x\lambda_2 = 0 & \text{(I)} \\ 4y^3 - \lambda_1 - 2y\lambda_2 = 0 & \text{(II)} \\ -2z - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \text{(III)} \\ \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0 & \text{(IV)} \\ \lambda_i g_i(x,y,z) = 0 \quad \text{dla } i = 1,2,3 & \text{(V)} \\ g_i(x,y,z) \leqslant 0 \quad \text{dla } i = 1,2,3 & \text{(VI)} \end{cases}$$

Musimy teraz sprawdzić, czy układ ten ma rozwiązanie (czyli – czy da się dobrać λ_1, λ_2, λ_3) dla (x,y,z) takich, jak podane w treści zadania.

- $(x,y,z) = (0,1,1)$.
  Mamy $g_1(0,1,1) = -8$, $g_2(0,1,1) = 0$, $g_3(0,1,1) = 0$, więc spełnione są warunki (VI), przy czym wiąz g_1 jest nieaktywny, więc z warunku komplementarności (V) mamy $\lambda_1 = 0$. Równania (I), (II), (III) – warunek Lagrange'a – przyjmują (po podstawieniu $(x,y,z) = (0,1,1)$ i $\lambda_1 = 0$ postać

  $$\begin{cases} 0 = 0 \\ 4 - 2\lambda_2 = 0 \\ -2 + \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

  więc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$. Wszystkie są nieujemne, zatem spełniony jest warunek (IV). Tym samym w punkcie $(0,1,1)$ spełnione są warunki konieczne KKT na maksimum.
- $(x,y,z) = (0,-1,1)$.
  Mamy $g_1(0,-1,1) = -10$, $g_2(0,1,1) = 0$, $g_3(0,1,1) = 0$, więc spełnione są warunki (VI), przy czym, jak w poprzednim przypadku, wiąz g_1 jest nieaktywny, zatem $\lambda_1 = 0$. Warunek Lagrange'a (równania (I)-(III)):

  $$\begin{cases} 0 = 0 \\ -4 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2 + \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

  Dostajemy te same rozwiązania na lambdy, co w poprzednim przypadku, zatem i w tym punkcie spełnione są warunki KKT.
- $(x,y,z) = (1,1,\sqrt{2})$.
  $g_1(1,1,\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 8 < 0$, $g_2(1,1,\sqrt{2}) = 2 - 1 > 0$. W tym miejscu zatrzymujemy się – punkt nie spełnia warunku $g_2(x,y,z) \leqslant 0$, a więc leży poza zbiorem A – nie spełnia zatem warunków KKT (nie jest spełniony jeden z warunków (VI)).
- $(x,y,z) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.
  $g_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) = -\sqrt{2} - 9 < 0$, $g_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) = 0$, $g_3(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) = 0$, więc jak przy pierwszych dwóch punktach wiąz g_1 jest nieaktywny, zatem $\lambda_1 = 0$. Warunek Lagrange'a:

  $$\begin{cases} -\sqrt{2}(1 - \lambda_2) = 0 \\ -\sqrt{2}(1 - \lambda_2) = 0 \\ -2 + \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

  zatem $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. W tym punkcie też są spełnione warunki konieczne KKT.