Zestaw przygotowawczy z EON, lato 2009

Zadanie 1

a) Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-2y^2}$ i ustal, czy funkcja f przyjmuje w nich minimum lokalne, maksimum lokalne, czy punkt siodłowy.

b) Oblicz $f'_{(1,2)}(0, 0)$ (tj. odpowiednią pochodną kierunkową funkcji f).

Zadanie 2 Znajdź (dowolną, byle poprawną metodą) najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = 2x - y^2 - z$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - y = 2,\ z^2 = 1,\ |x| \leqslant 2\}.$$

Zadanie 3 Produkcja pewnej firmy zależy od liczby zatrudnionych pracowników (n) oraz od liczby godzin, jaką każdy z nich przepracuje tygodniowo (k). Funkcja produkcji (wyrażona w sztukach towaru) ma postać

$$f(n, k) = 50\frac{nk}{n + 2k}.$$

Koszty jakie ponosi firma w związku z zatrudnieniem n pracowników, każdego na k godzin tygodniowo, to $K(n, k) = nk + n$. Wyznacz minimalny koszt, jaki trzeba ponieść, by wyprodukować 144 sztuki towaru.

Zadanie 4 Rozważ zagadnienie poszukiwania największej wartości funkcji
$f(x, y, z) = x^2 + y^4 - z^2$ na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z \leqslant 10,\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 1\}.$$

a) Czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą na zbiorze A? Odpowiedź uzasadnij.

b) Sprawdź warunek jakości więzów dla tego zadania.

c) Wypisz warunki konieczne KKT dla tego zadania. Sprawdź, w których z wymienionych poniżej punktów są spełnione:

$$(0, 1, 1), \quad (0, -1, 1), \quad (1, 1, \sqrt{2}), \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1).$$

Zadanie 5 Wykaż, że zbiór

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| + |y| \leqslant 4,\ \max\{|x|, |y|\} \leqslant 3,\ x + z \leqslant 2,\ y + z \geqslant -1\}$$

jest wypukły i zwarty oraz wskaż zbiór jego punktów ekstremalnych.

Zadanie 6 Znajdź punkty krytyczne poniższych funkcji i sprawdź, czy są to ich minima lokalne, maksima lokalne czy punkty siodłowe.

a) $f(x, y) = 3x^2 - y^3 + 12xy - 36y$

b) $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2 + y^4$

c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$

d) $f(x, y) = (1 + e^y)\cos x + ye^y$

Zadanie 7 Czy poniższe zbiory są wypukłe? Jeżeli tak, to znajdź ich punkty ekstremalne.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \geqslant x\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \leqslant x\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y = x\}$

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \ |z| \leqslant 1\}$

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \ |z| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}\}$

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \ |z| \leqslant 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |x| \leqslant y\}$

h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |x| \leqslant y \leqslant 3 - |x|\}$

Zadanie 8 Znajdź kres górny i dolny funkcji f na zbiorze E. Czy f osiąga na E swoje kresy?

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |x| + |y| \leqslant 1\}$

b) $f(x,y) = x + 2y + 1$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \leqslant 2x + 2, x \leqslant 1\}$

c) $f(x,y) = x + 2y + 1$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \leqslant 2x + 2, |x| \leqslant 1\}$

d) $f(x,y) = x + 2y + 1$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \leqslant 2x + 2, |x| < 1\}$

e) $f(x,y) = x + 2y + 1$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y \leqslant 2x + 2, |x| = 1\}$

f) $f(x,y) = xy^2$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

Zadanie 9 Znajdź minimum funkcji $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + 5y^2 + x - 9y$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Zadanie 10 Znajdź maksimum funkcji $f(x,y) = -(x-4)^2 - (y-4)^2$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \leqslant 4, \ x + 3y \leqslant 9\}$. Czy spełnione są warunki dostateczne KKT?

Zadanie 11 Znajdź maksimum funkcji $f(x,y) = xy$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \leqslant 6, \ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Czy spełnione są warunki dostateczne KKT?

Zadanie 12 Znajdź maksimum funkcji $f(x,y) = xy$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 9, \ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Czy spełnione są warunki dostateczne KKT?

Zadanie 13 Które z poniższych zbiorów są wypukłe? Które są domknięte? Dla tych, które są zarówno wypukłe, jak i domknięte, wskaż punkty ekstremalne. Znajdź dla nich również punkty położone najbliżej i najdalej początku układu współrzędnych.

a) $\{x \in (-1,1) \ : \ x^2 > 0\}$

b) $\{x \in (-1,1) \ : \ x^2 > 0, \ x^3 > 0\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 1, \ x^2 - y^2 > 1\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x - y| + |x + y| < 1\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 < 3\}$

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + 2y^2 \leqslant 3, \ |z| \leqslant 1\}$

g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - z = 2, \ x^2 - 2x + y^2 \leqslant 9\}$

Zadanie 14 Które z poniższych funkcji f są wypukłe na zbiorze A? Które są wklęsłe? Sprawdź to korzystając z warunków pierwszego, lub drugiego rzędu.

a) $f(x,y) = x^2 + y^4 - x - 2y, \ A = \mathbb{R}^2$

b) $f(x,y) = \cos x \cos y, \ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leqslant 1\}$

c) $f(x,y) = (x+y)^2 - (2x-y)^2 + z$, $A = \mathbb{R}^2$.

Zadanie 15 Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x,y) = x^\alpha + \alpha y^2$ jest wypukła, a dla jakich wklęsła?

Zadanie 16

a) Wyznacz punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = 3x^2 + 6xy + y^2 - y^4, \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

i ustal, czy jest w nich minimum, maksimum, czy punkt siodłowy.

b) Oblicz $f'_v(0,1)$ dla $v = (1,2)$.

Zadanie 17
Znajdź minimum funkcji

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + 5y^2 + x + y$$

na zbiorze

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 4, x + y = 1\}$$

Zadanie 18
Sprawdź, czy zbiór

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^3 - y \leqslant 0, \max\{|x-1| + |y|, x\} \leqslant 1\}$$

jest wypukły.

Zadanie 19 a) Sprawdź czy funkcja $f(x) = (x-1)^5 + 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jest quasiwypukła lub quasiwklęsła.

b) Udowodnij, że funkcja $g(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^4)$ określona na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ jest quasiwypukła.

Zadanie 20 Wyznacz subróżniczkę funkcji

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 2||x| - 1| + x$, w punkcie $x = -1$;

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad g(x,y) = \max\{x, 2y, 0\}$, w punkcie $(x,y) = (0,0)$.

Zadanie 21 Wyznacz stożki: styczny i normalny do zbioru

a) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y + 2 \geqslant 0, \ x^2 + y^2 \leqslant 25\}$
w punkcie $(x,y) = (-3,4)$;

b) $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x-y|, x + y - 2, \} \leqslant z\}$
w punkcie $(x,y,z) = (1,1,0)$.

Zadanie 22 Niech funkcja f dana będzie wzorem $f(x,y) = x^4 + 2x + y - 1$. Sprawdź, czy w którymś z punktów $(2,0)$, $(-2,4)$, $(0,0)$, $(-2,-4)$, spełnione są warunki dostateczne KKT na to, by w punkcie tym f osiągała minimum na zbiorze

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x+y|, -x\} \leqslant 2, \ (x+2)^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

Zadanie 23

a) Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x,y) = x^3 + \alpha y + xy$$

przyjmuje minimum na zbiorze $A = \{x \leqslant 0, \ x^2 + 2|y| \leqslant 20\}$ na brzegu tego zbioru?

b) Dla jakich wartości parametru $\beta \in \mathbb{R}$ funkcja

$$g(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2+2\beta(x-y)}$$

przyjmuje *(i)* minimum *(ii)* maksimum na zbiorze

$$B = \{\max\{|x+y|, |y|\} \leqslant 2,\ z = 1\}$$

w punkcie, w którym wiąz z nierównością występujący w definicji zbioru B jest nieaktywny?

Zadanie 24 Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{12}(x-y)^3.$$

Zbadaj, czy funkcja ma w nich minimum, maksimum, czy punkt siodłowy.

Zadanie 25 Niech

$$f(x, y, z) = \frac{e^{x+y-2z}\sin z}{x+y^2}.$$

Wyznacz $f'_{(0,0,1)}(\pi, \pi, 0) + 2f'_{(-1,1,0)}(2\pi, 2\pi, \pi)$.

Zadanie 26 Czy funkcja

$$f(x) = \sqrt{|x-1|}$$

jest **a)** quasiwypukła **b)** quasiwklęsła na $\mathbb{R}$?

Zadanie 27 Wyznacz (uzasadniając odpowiedź) subróżniczkę funkcji

$$f(x) = \max\{x^2 - 1, 2x + 7, 1\}$$

w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 28 Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leqslant 25,\ |y| + |x| \leqslant 7\}$$

a) Wykaż, że A jest zbiorem wypukłym i zwartym.

b) Wyznacz zbiór punktów ekstremalnych A.

c) Wybierz jeden z punktów ekstremalnych zbioru A i wyznacz w nim stożki: styczny i normalny do A (jako podzbiory $\mathbb{R}^2$). Proszę uzasadnić odpowiedź!

Zadanie 29 Niech

$$f(x) = (x + y + 3)^4 + (x - 2y)^2.$$

Wyznacz $\min_A f(x)$ (najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze A) oraz $\operatorname{argmin}_A f(x)$ (a więc punkt, w którym jest ona osiągana), gdzie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x+y|, |x-y|\} \leqslant 2008\}.$$

Zadanie 30 Rozważ zadanie poszukiwania maksimum funkcji

$$f(x) = x - y + 1$$

na zbiorze

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 8,\ y \geqslant x^2 - 2\}.$$

Sprawdź czy w punkcie **a)** $(1, -1)$, **b)** $(-3, 3)$, **c)** $(1, 3)$ spełnione są warunki konieczne KKT (na to, by w punkcie tym $f(x)$ przyjmowała maksimum).

Zadanie 31 a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2||x|-1|+x$, w punkcie $x=-1$;

b) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=\max\{x,2y,0\}$, w punkcie $(x,y)=(0,0)$.

Zadanie 32 Wyznacz stożki: styczny i normalny do zbioru

a) $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+y+2 \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 25\}$
w punkcie $(x,y)=(-3,4)$;

b) $Y = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \max\{|x-y|, x+y-2,\} \leqslant z\}$
w punkcie $(x,y,z)=(1,1,0)$.

Zadanie 33 Niech funkcja f dana będzie wzorem $f(x,y) = x^4+2x+y-1$. Sprawdź, czy w którymś z punktów $(2,0)$, $(-2,4)$, $(0,0)$, $(-2,-4)$, spełnione są warunki dostateczne KKT na to, by w punkcie tym f osiągała minimum na zbiorze

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ \max\{|x+y|,-x\} \leqslant 2,\ (x+2)^2+y^2 \leqslant 16\}.$$

Zadanie 34 a) Dla jakich wartości parametru $\alpha\in\mathbb{R}$ funkcja

$$f(x,y) = x^3+\alpha y+xy$$

przyjmuje minimum na zbiorze $A=\{x\leqslant 0,\ x^2+2|y|\leqslant 20\}$ na brzegu tego zbioru?

b) Dla jakich wartości parametru $\beta\in\mathbb{R}$ funkcja

$$g(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2+2\beta(x-y)}$$

przyjmuje *(i)* minimum *(ii)* maksimum na zbiorze

$$B = \{\max\{|x+y|,|y|\} \leqslant 2,\ z=1\}$$

w punkcie, w którym wiąz z nierównością występujący w definicji zbioru B jest nieaktywny?