

Zadania z EON – zestaw 3.

Zadanie 1 Wykaż, że każda podprzestrzeń afiniczna przestrzeni \mathbb{R}^n jest zbiorem wypukłym. Przypomnienie: Mówimy, że $V \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną, jeżeli dla pewnego (albo i każdego – w tym przypadku wszystko jedno) $x \in V$ zbiór $\{y - x : y \in V\}$ jest podprzestrzenią liniową \mathbb{R}^n .

Zadanie 2 Sprawdź, czy poniższe zbiory są wypukłe.

- a) $\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}$,
- b) $\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x_1, x_2\} \leq 1 \right\}$,
- c) $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 2 \right\}$,
- d) $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, \forall_{i \in \{1,2,3\}} x_i \geq 0 \right\}$,
- e) $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - x_3, x_1^2 + x_2^2 \leq 1 + x_3 \right\}$.

Zadanie 3 Dla zbiorów wypukłych z Zadania 2 wskaż zbiory punktów ekstremalnych.

Zadanie 4 Niech zbiory $A, B \subset \mathbb{R}^n$ będą wypukłe. Wykaż, że zbiory

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$
$$A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$$

również są wypukłe. Czy z tego, że A i $A + B$ są wypukłe wynika, że B jest wypukły?

Zadanie 5 Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją liniową, a $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami wypukłymi. Wykaż, że zbiory $f(A) \subset \mathbb{R}^m, f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ są również wypukłe.

Zadanie 6 Znajdź wartości ekstremalne podanej funkcji liniowej f na zbiorze wypukłym A .

- a) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad A = \{\max\{x_1 - 2, x_2 + 3\} \leq 2\}$,
- b) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3 - 2, \quad A = \{x_1 + x_2 + x_3 \geq -2, \forall_{i \in \{1,2,3\}} x_i \leq 1\}$,
- c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad A = \{|x_1 - 2| + |x_2| + |x_3 + 1| \leq 1\}$,

Zadanie 7 Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wykaż, że dla każdego $r \in \mathbb{R}$ zbiór $A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < r\}$ jest wypukły.

Zadanie 8 Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wykaż, że nadwykres funkcji f jest zbiorem wypukłym.