Zadania z EON – zestaw 12.

Zadanie 1 1 metr nad okrągłym stołem o średnicy 6 metrów, umieszczono symetrycznie względem środka stołu i w płaszczyźnie prostopadłej do blatu, przechodzącej przez środek blatu stołu, dwa identyczne źródła światła oddalone od siebie o 4 metry. Wiedząc, że natężenie oświetlenia E w odległości r od jednego źródła światła wyraża się wzorem

$$E(r) = \frac{I}{4\pi r^2},$$

gdzie I jest natężeniem światła źródła, oblicz minimalne i maksymalne natężenie oświetlenia na powierzchni stołu.

Zadanie 2 Wyznacz najbliżej i najdalej oddalony punkt na zbiorze $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - \frac{1}{2}y^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ od punktu $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Zadanie 3 Dowodząc wypukłości (albo wklęsłości) funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz wypukłości zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$, znajdź minimum (albo maksimum) funkcji f na zbiorze A.

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + 1 + e^{x_2+1} + e^{-8x_2+4}$,
$A = \{(x_1, x_2,) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, 3x_2\} < 2\}$;

b) $f(x_1, x_2) = e^{x_1-x_2} + x_2 - x_1 + \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + 2)^2$,
$A = \{(x_1, x_2,) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 2)^4 + e^{x_2} < 2008\}$;

c) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) - x_1^2 - x_2^2$,
$A = \{(x_1, x_2,) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 > 0,\ x_1 + x_2 > 0\}$.

Zadanie 4 Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1-1)^2-(x_2+1)^2-x_3^2}$$

przyjmuje na zbiorze $A_a = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq a^2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ maksimum w punkcie, w którym pierwszy wiąz jest nieaktywny?

Zadanie 5 Udowodnij, że funkcja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^4$ obcięta do zbioru $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 2,\ \max\{|x_1 - x_2|, |x_2 + x_3|\} \leq 4\}$ przyjmuje minimum w punkcie, w którym wiąz nierównościowy jest nieaktywny. Oblicz to minimum.

Zadanie 6 Udowodnij, że funkcja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^1 x_3^3$ rozważana w punktach zbioru $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 \leq 1\}$ osiąga maksimum w punkcie, w którym wiąz nierównościowy jest aktywny.

Zadanie 7 Znajdź minimum funkcji $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ na zbiorze $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.