Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Niezależność zdarzeń
4.12.2017

Jest rzeczą naturalną powiedzieć, że zdarzenie A nie zależy od zdarzenia B, jeśli informacja o zajściu zdarzenia B nie ma wpływu na szanse zajścia zdarzenia A, czyli $P(A|B) = P(A)$ (tutaj musimy założyć, że $P(B) \neq 0$). Co więcej, warunek ten jest symetryczny ($P(A|B) = P(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(B|A) = P(B)$ przy założeniu, że $P(A), P(B) > 0$), co uzasadnia wprowadzenie następującej definicji.

Definicja. Parę zdarzeń A, B nazywamy niezależnymi, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $P(B) > 0$ i $P(A|B) = P(A)$, to zdarzenia A, B są niezależne.

Zadanie 2. Losujemy kartę z talii 52 kart. Czy:

(a) Wylosowanie asa i wylosowanie karty czerwonej są zdarzeniami niezależnymi?

(b) Wylosowanie pika i wylosowanie czarnego asa są zdarzeniami niezależnymi?

(c) Wylosowanie pika i wylosowanie czerwonego asa są zdarzeniami niezależnymi?

Zadanie 3. Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich 95% i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0.01%) i piratów (jest ich 5% i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0.5%). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w 2010, ani 2011. Jakie jest szansa, że spowoduje wypadek w 2012?

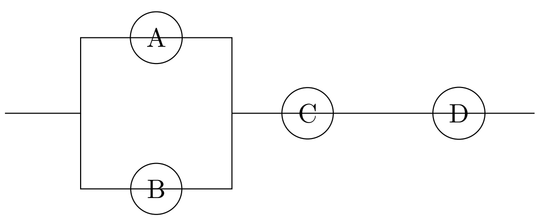
Zadanie 4. Tenisista musi wygrać dwa kolejne mecze z trzech. Może grać

(a) z mistrzem, kolegą klubowym i znów z mistrzem, lub

(a) z kolegą, z mistrzem i znów z kolegą.

Który wariant daje większe szanse, jeśli wyniki kolejnych meczów są niezależne.

Zadanie 5. Oblicz prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez układ pokazany na rysunku, składający się z czterech przekaźników A, B, C, D, działających niezależnie od siebie, jeśli prawdopodobieństwa działania każdego z przekaźników wynoszą 0.7, 0.8, 0.9 i 0.6.



Zadanie 6. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzania: $A = \{$ w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek$\}$, $B = \{$w drugim rzucie wypadła parzysta liczba oczek$\}$, $C = \{$ w sumie w obu rzutach wypadłą parzysta liczba oczek$\}$. Czy trójka zdarzeń A, B, C jest niezależna?

Zadanie 7. Rzucamy trzy razy monetą. Rozważmy zdarzania: $A = \{$w pierwszym i drugim rzucie wypadło to samo$\}$, $B = \{$wypadła co najmniej jedna reszka$\}$, $C = \{$w rzutach drugim i trzecim wypadło to samo$\}$. Czy trójka zdarzeń A, B, C jest niezależna?

Zadanie 8. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli

(a) wypadły 3 szóstki,

(b) w następnych 9 rzutach otrzymano same szóstki.

Zadanie 9. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz liczby $p, q \in (0,1)$ spełniające $p + q = 1$. Dowieść, że

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1.$$