

20.11.2017

Rozbiciem zbioru zdarzeń elementarnych Ω nazywamy rodzinę zdarzeń (hipotez) $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, które wzajemnie się wykluczają, zaś ich suma jest równa Ω .

Twierdzenie. (wzór Bayesa) Jeśli $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ jest rozbiciem zbioru Ω i zdarzenia H_1, H_2, \dots, H_n mają dodatnie prawdopodobieństwa, to zachodzi wzór

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Zadanie 1. Uzupełnić zadania z ćwiczeń nr 7.

Zadanie 2. Ktoś rzucił 3 razy monetą i poinformował nas, że wypadła nieparzysta liczba orłów. Jaka jest szansa, że wypadły 3 orły?

Zadanie 3. W urnie mamy 7 kul białych i 13 czarnych. Wyciągamy jedną, sprawdzamy kolor: jeśli jest biała, to zwracamy ją do urny, jeśli czarna — wyrzucamy. Wyciągamy jeszcze dwie kule w ten sposób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ostatnia (trzecia) wylosowana kula jest czarna?

Zadanie 4. Na początku w urnie jest 7 kul białych i 13 czarnych. Losujemy kolejno kule z urny. Za każdym razem, gdy wylosujemy kulę, zwracamy ją i dokładamy jeszcze dwie kule tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dziesiąta wylosowana kula jest czarna?

Zadanie 5. W zbiorze 3 monet jedna ma po obu stronach orły. Losujemy jedną z tych monet. Wypadł orzeł. Jakie są szanse, że jest to moneta z orłami po obu stronach?

Lekarze używają dwóch wskaźników jakości testu. *Czułość (sensitivity)* testu to odsetek chorych, u których test daje wynik dodatni. *Swoistość (specificity)* testu to odsetek zdrowych, u których test daje wynik ujemny.

Zadanie 6. Próba wysiłkowa, której czułość wynosi 65%, a swoistość 85% jest powszechnie używana w celu wykrycia choroby wieńcowej. Załóżmy, że 10% populacji jest chorych na chorobę wieńcową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa prowadzi do prawidłowej diagnozy.

Zadanie 7. Losujemy 2 przekątne 7-kąta foremnego. Obliczyć prawdopodobieństwo, że te przekątne przecinają się.

Zadanie 8. Rzucono kostką. Wyrzuconą liczbę oczek oznaczmy przez n . W urnie jest n kul, ponumerowanych liczbami od 1 do n . Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania i zapisujemy cyfry z tych kul w kolejności losowania. Okazało się, że otrzymana liczba jest równa 23. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $n = 3$?

Zadanie 9. Ojciec proponuje synowi następującą grę o kieszonkowe: syn rozmieści w dwóch kapeluszach 5 banknotów po 100 zł i 5 dziesięciozłotowych. Następnie - z zamkniętymi oczami - wylosuje kapelusz, a z niego jeden banknot. Jak rozmieścić banknoty, by szansa wylosowania stu złotych była największa?

Zadanie 10. W komodach A, B i C są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w A są złote monety, w B srebrne, a w C po jednej złotej i srebrnej. Wylosowano komodę, następnie szufladę i znaleziona tam złotą monetę. Jaka jest szansa, że w drugiej szufladzie z tej komody jest złota moneta?

Zadanie 11. Które z poniższych zdań są prawdziwe:

- W pewnych dwóch szkołach na Mazowszu przeprowadzono testy dotyczące umiejętności czytania ze zrozumieniem. Zarówno chłopcy ze szkoły pierwszej mieli lepszy średni wynik niż chłopcy z drugiej, jak i dziewczęta ze szkoły pierwszej miały lepszy wynik niż dziewczęta z drugiej. Czy z tego wynika, że średni wynik pierwszej szkoły był lepszy, niż średni wynik drugiej?
- Bolek i Lolek chodzą do tego samego liceum, Bolek w klasie o profilu matematycznym, Lolek — humanistycznym. W każdym z trzech lat uczęszczania do szkoły średnia ocen Bolka była wyższa niż Lolka. Czy średnia ocen z całego okresu nauki w liceum musi być wyższa u Bolka? Czy odpowiedź się zmieni, jeśli wiemy, że obaj byli w klasie o tym samym profilu?
- Czy jest możliwe, aby w wyniku przeprowadzenia się części mieszkańców miasta A do miasta B średni iloraz inteligencji w obu miastach wzrósł?