

Założmy, że pewne doświadczenie losowe składa się z serii jednakowych  $n$  doświadczeń, które będziemy nazywać próbami. Zakładamy, że te próby są niezależne oraz każda próba kończy się jednym z dwóch wyników: *sukcesem* lub *porażką*. Takie właśnie doświadczenie losowe nazywamy schematem Bernoulliego. Zwykle prawdopodobieństwo sukcesu będziemy oznaczać przez  $p$ , a porażki przez  $q = 1 - p$ .

**Twierdzenie 1.** Prawdopodobieństwo uzyskanie dokładnie  $k$  sukcesów w schemacie Bernoulliego wynosi

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Zadanie 1. Rzucamy monetą 10 razy. Oblicz szanse wyrzucenia dokładnie 5 orłów.

Zadanie 2. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem

(a) 3 partie z 4, czy 5 partii z 8,

(b) co najmniej 3 partie z 4, czy co najmniej 5 partii z 8?

Zadanie 3. W meczu piłki nożnej goście wygrywają z prawdopodobieństwem  $1/6$ , gospodarze - z prawdopodobieństwem  $1/2$ , a z prawdopodobieństwem  $1/3$  jest remis. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 14 meczach będzie 7 zwycięstw gospodarzy i 3 remisy.

Zadanie 4. Adam i Bolek grają w ping-ponga kończą seta grą na "przewagę" przy stanie 20 : 20. Wiadomo, że Adam wygrywa 2 piłki na 3. Jaką ma szansę wygranej?

**Twierdzenie 2.** Najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego ( $n$ -prób) jest  $k = \lfloor p(n + 1) \rfloor$ .

Zadanie 5. Rzucamy 10 razy kostką do gry. Niech  $p_k$  oznacza prawdopodobieństwo, że szóstka pojawi się  $k$ -krotnie. Która z liczb  $p_0, p_1, p_2, p_3$  jest największa?

Zadanie 6. W kieszeniach, lewej i prawej, mamy po jednym pudełku zapalek. W każdym z pudełek jest na początku  $m$  zapalek. Chcąc zapalić papierosa, sięgamy do kieszeni lewej, bądź prawej z jednakowym prawdopodobieństwem, po czym wyciągamy z niej pudełko i jedną z zapalek. Oblicz prawdopodobieństwo, że gdy po raz pierwszy w wylosowanym pudełku nie będzie już zapalek, w drugim będzie ich  $k$ .

Zadanie 7. Adam i Bartek grają w "orła i reszkę". Adam wygrywa, jeśli wyrzuci orła. Jeśli wyrzuci reszkę to monetę oddaje Bartkowi. Celem Bartka jest wyrzucenie reszki. Jeśli wyrzuci orła, moneta wraca do Adama, i tak dalej. Zaczyna Adam. Jakie są szanse wygrania Adama, jeśli

(a) moneta jest symetryczna,

(b) jeśli moneta jest asymetryczna i orzeł wypada dwa razy rzadziej niż reszka.

Zadanie 8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając

(a) symetryczną monetą 99 razy, orzeł wypadnie co najmniej 50 razy,

(b) kostką sześcienną 9 razy, liczba oczek podzielna przez wypadnie co najmniej 3 razy.

Zadanie 9. W grze bierze udział 10 osób, z których każdy, niezależnie, otrzyma nagrodę z prawdopodobieństwem  $p$ , przy czym pula nagród wynosi 1000 zł i jest rozdzielana pomiędzy zwycięzców po równo. Niech  $X$  równa się wysokości wygranej. Podaj rozkład zmiennej losowej  $X$ .