

Ćwiczenia nr 1
Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Dowody indukcyjne, 2.10.2017

Zadanie 1. Proszę uzasadnić, że

- (a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,
- (b) $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$,
- (c) $(1 - \frac{1}{2^x}) \cdot (1 - \frac{1}{3^x}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n^x}) = \frac{n+1}{2n}$,
- (d) $2^n \geq n^2$ dla $n \neq 3$,

Zadanie 2. Ciąg liczb F_1, F_2, \dots tworzymy według następującego przepisu:

$$F_1 := 1, F_2 := 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

dla $n = 3, 4, \dots$. Proszę uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi związek

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Zadanie 3. Proszę uzasadnić, że

- (a) Dowolna liczba postaci $10^n - 4$ dzieli się przez 6.
- (b) 14 dzieli dowolną liczbę postaci $8^n + 6$.
- (c) 169 dzieli liczbę $3^{3n+3} - 26n - 27$ dla liczb naturalnych n .
- (d) Czy prawdą jest, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, n liczba $a^n + b$ dzieli się przez $a + b$?
- (e) 19 dzieli liczbę $2^{2^{6k+2}} + 3$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$
- (f) $1000^n + (-1)^{n+1}$ dzieli się przez 13

Twierdzenie. Dla dowolnych nieujemnych liczb a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Zadanie 4. Proszę udowodnić to twierdzenie w następujących krokach. Niech T_n ($n \geq 2$) oznacza powyższą nierówność.

- (a) Sprawdzić, że zdanie T_2 jest prawdziwe.
- (b) Wykazać, że jeśli zdanie T_n jest prawdziwe, to zdanie T_{2n} też.
- (c) Wykazać, że jeśli zdanie T_n jest prawdziwe, to zdanie T_{n-1} też.
- (d) Uzasadnić, że zdania T_7 i T_{77} są prawdziwe.
- (e) Dokończyć dowód powyższego twierdzenia.

Zadanie 5. Definiujemy ciąg liczb $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5$ oraz $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geq 3$.

- (a) Oblicz a_n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7$.
- (b) Udowodnij, że $a_n > 2^n$ dla $n \geq 1$.
- (c) Udowodnij, że $a_n < 2^{n+1}$ dla $n \geq 1$.
- (d) Udowodnij, że $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^{n-1}$ dla $n \geq 1$.

Zadanie 6. Z szachownicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole, ale nie wiadomo które. Udowodnić, że tak

powstałą część szachownicy można pokryć figurami

