Przestrzeń funkcji całkowalnych

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą.
Dla dowolnej funkcji mierzalnej względem μ
definiujemy

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$$

Jak wiemy, jeżeli ta wielkość jest skończona, to funkcję f nazywamy całkowalną względem miary μ.

Z liniowości całki, nierówności trójkąta $|f+g| \leq |f| + |g|$ i monotoniczności całki widzimy, że $\|\cdot\|_1$ ma następujące własności:

- $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$ dla każdej mierzalnej f
- $\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$ dla wszystkich mierzalnych f i g

Czyli $\|\cdot\|_1$ spełnia 2 z 3 warunków na bycie normą (na przestrzeni funkcji całkowalnych).
Co z ostatnim warunkiem? $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$?
Nie jest spełniony: $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ p.w. $\Leftrightarrow f = 0$ p.w. (względem miary μ).

Aby obejść tę trudność, wprowadzamy na zbiorze funkcji mierzalnych relację $\sim$:

$f \sim g$, gdy $f = g$ μ-prawie wszędzie,

czyli równość $f(x) = g(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in X$ poza być może pewnym zbiorem miary zero.
(μ)

Odtąd zamiast funkcji f rozważamy jej klasę abstrakcji względem relacji $\sim$: utożsamiamy dwie funkcje, jeżeli są równe μ-prawie wszędzie. Nie będziemy jednak tego w szczególny sposób ujawniać w zapisie, trzeba o tym po prostu pamiętać.

<u>Def</u>: Przestrzenią $L^1(X, \mu)$ nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ określonej na funkcjach $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ całkowalnych, tj tych, dla których $\int_X |f| d\mu < \infty$.

$L^1(X, \mu)$ jest przestrzenią liniową (trzeba sprawdzić, że $[\alpha f + \beta g]_\sim = \alpha [f]_\sim + \beta [g]_\sim$)

a funkcja $[f]_\sim \longrightarrow \|f\|_1$ jest normą na $L^1(X, \mu)$, w szczególności $d([f]_\sim, [g]_\sim) = \|f - g\|_{L^1}$ jest metryką na $L^1(X, \mu)$.

przestaję pisać, że chodzi o klasy abstrakcji

<u>Twierdzenie</u>: (jeden z przypadków tw. Riesza-Fischera)

1) $L^1(X,\mu)$ z metryką $d(f,g) = \|f-g\|_1$ jest przestrzenią zupełną

2) Jeżeli $f_k \to f$ w przestrzeni $L^1(X,\mu)$, to z ciągu (f_k) można wybrać podciąg zbieżny do f μ-prawie wszędzie.

Frigyes (Fryderyk) Riesz (1880, Györ – 1956, Budapeszt) wybitny matematyk węgierski pochodzenia żydowskiego, jeden z ojców analizy funkcjonalnej, brat innego wybitnego matematyka – Marcela Riesza.

Ernst Sigismund Fischer (1875, Wiedeń – 1954, Kolonia) matematyk austriacki, uczeń Mertensa i Minkowskiego, profesor uniwersytetów w Erlangen i Kolonii.

<u>Dowód</u>:

Niech (f_k) będzie ciągiem Cauchy'ego w $L^1(X,\mu)$:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{m_\varepsilon} \forall_{k,l \geq m_0} \|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon.$$

<u>Krok 1</u>: Szukamy kandydata na granicę.

Możemy wybrać rosnący ciąg indeksów (k_j) taki, by $\forall_{l>k_j} \|f_l - f_{k_j}\| < \frac{1}{2^j}$ (wystarczy zapewnić sobie $k_j > m_{2^{-j}}$)

Z tw. Fubiniego

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Phi(x,y)\, d\lambda_{2n}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, d\lambda_n(x) \right) d\lambda_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, d\lambda_n(x) \right) |g(y)|\, d\lambda_n(y) =$$

$$\underset{\text{niezmienniczość m. Leb. wzgl. przesunięć}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, d\lambda_n(x) \right) |g(y)|\, d\lambda_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_1 \cdot |g(y)|\, d\lambda_n(y) = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, d\lambda_n(y) =$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1$$

Z drugiej strony, dzięki nierówności $\left| \int_X h\, d\mu \right| \leq \int_X |h|\, d\mu$ (prawdziwej na dowolnej p-ni z miarą),

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f*g|\, d\lambda_n}_{\|f*g\|_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, d\lambda_n(y) \right| \right) d\lambda_n(x) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, d\lambda_n(y) \right) d\lambda_n(x) \underset{\text{tw. Fubiniego}}{=} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Phi(x,y)\, d\lambda_{2n}(x,y)$$

To dowodzi, że $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Splot jest operacją przemienną: dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$f * g = g * f.$$

Dowód:

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, g(x-z)\, d\lambda_n(z) = (g*f)(x).$$

zamiana zmiennych

$y \longmapsto z = x - y$

wyznacznik równy $(-1)^n$,

więc moduł równy 1.

(x jest ustalone)

Tak samo pokażemy, że splot jest działaniem łącznym (co zostawiam Państwu jako zadanie).

Twierdzenie: Działanie $*$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$ nie ma elementu neutralnego.

Dowód: Załóżmy, że istnieje $\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ o tej własności, że $\forall_{f \in L^1(\mathbb{R}^n)}\ f * \delta = f$.

Wtedy w szczególności $\forall_{\varepsilon > 0}\ \chi_{B(0,\varepsilon)} * \delta = \chi_{B(0,\varepsilon)}$,

więc $\forall_{\varepsilon>0}\ 1 = \chi_{B(0,\varepsilon)}(0) = (\chi_{B(0,\varepsilon)} * \delta)(0) =$

$$= (\delta * \chi_{B(0,\varepsilon)})(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(0-y)\, \chi_{B(0,\varepsilon)}(y)\, d\lambda_n(y) =$$

$$= \int_{B(0,\varepsilon)} \delta(-y)\, d\lambda_n(y) = \int_{B(0,\varepsilon)} \delta(y)\, d\lambda_n(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

z jednostajnej ciągłości całki

Sprzeczność. $\lightning$

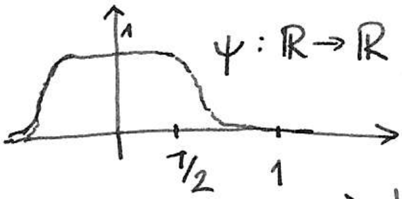
Prawdziwej „jedności splotowej" w $L^1(\mathbb{R}^n)$ nie ma, ale jest coś, co ją przybliża, czy wręcz zastępuje: istnieje taka rodzina funkcji $\varphi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon>0$, że $\forall_{g\in L^1(\mathbb{R}^n)}\ g*\varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^1} g$.

Konstrukcja tej rodziny, zwanej jedynką aproksymacyjną, ma wiele innych ważnych własności i zastosowań, o niektórych Państwu zaraz opowiem.

Na początek konstrukcja.

Niech $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie nieujemną funkcją gładką, o nośniku zawartym w kuli jednostkowej i taką, że $\int\limits_{B(0,1)} \varphi\, d\lambda_n = 1$.

(np. bierzemy skonstruowaną w zeszłym roku funkcję



$\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi\equiv 1$ na $[-1/2, 1/2]$,
$\psi \equiv 0$ poza $[-1,1]$

i kładziemy $\tilde\varphi(x) = \psi(|x|)$. $\tilde\varphi$ jest prawie dobra, ale nie wiemy, czy spełnia $\int\limits_{B(0,1)}\tilde\varphi\,d\lambda_n = 1$.
Na pewno $\int\limits_{B(0,1)}\tilde\varphi\, d\lambda_n >0$, bo jest $>\lambda_n(B(0,1/2))$, więc bierzemy

$$\varphi(x) = \frac{\tilde\varphi(x)}{\int\limits_{B(0,1)}\tilde\varphi(x)\,d\lambda_n(x)}.$$

Wtedy φ spełnia wszystkie wymagania.)

Teraz kładziemy

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\,\varphi\left(x/\varepsilon\right)$$

Na początek proste obserwacje:

Niech $\varepsilon > 0$.

Funkcja $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest

- nieujemna
- klasy C^∞
- ma nośnik zwarty, zawarty w $B(0,\varepsilon)$

oczywiste

- $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,d\lambda_n(x) = 1$, bo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}\varphi\left(x/\varepsilon\right) d\lambda_n(x) \underset{\substack{\uparrow \\ y = \varepsilon x}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}\varphi(y)\,\varepsilon^{n}\,d\lambda_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,d\lambda_n(y) = 1.$$

Jakobian ε^n

Chcemy teraz udowodnić, że dla dowolnej $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi $f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f$.

By to wykazać, udowodnimy kilka lematów, nie mniej ważnych niż końcowy wynik.

Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy pojęcie jedynki aproksymatywnej:

wybieraliśmy nieujemną funkcję gładką $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o nośniku zawartym w kuli $\underline{B(0,1) \subset \mathbb{R}^n}$ (nośnik φ, ozn. $\operatorname{supp}\varphi$, to $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$) – a więc $\varphi \equiv 0$ poza $B(0,1)$, i taką, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\lambda_n = 1.$$

Następnie definiowaliśmy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$.

Zauważmy, że $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \overline{B(0,\varepsilon)}$; funkcja φ_ε jest gładka i

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, d\lambda_n(x) = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x/\varepsilon)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, d\lambda_n(y) = 1.$$

$y = x/\varepsilon \Rightarrow x = \varepsilon y$

jakobian zamiany zmiennych równy ε^n

Zachodzi też prosty, choć ważny fakt:

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, to $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i dla każdego wielowskaźnika α mamy

$$D^\alpha(f*g) \overset{\boxtimes}{=} f * D^\alpha g.$$

<u>Wniosek</u>: Dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcja $f * \varphi_\varepsilon$ jest funkcją gładką.

~~Lemat~~ Twierdzenie. Niech $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wtedy dla dowolnej $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ splot $f * h$ jest funkcją klasy $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i dla dowolnego wielowskaźnika α

$$D^\alpha (f*h) \overset{\boxtimes}{=} f * D^\alpha h .$$

Dowód

Zauważmy najpierw, że $f*h$ jest funkcją ciągłą. Funkcja h jest gładka o nośniku zwartym, jest więc ograniczona; niech $M = \sup_{\mathbb{R}^n} |h|$.

$$\lim_{y \to x} (f*h)(y) = \lim_{y\to x} (h*f)(y) = \lim_{y \to x} \int_{\mathbb{R}^n} h(y-z) f(z) \, d\lambda_n(z)$$

dla każdego y $|h(y-z) f(z)| \leq M |f(z)| \leftarrow$ całkowalne, więc z tw. Lebesgue'a o zb. zmajoryzowanej

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{y\to x} h(y-z) f(z) \, d\lambda_n(z) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-z) f(z) \, d\lambda_n(z) =$$

$= (f*h)(x)$, co dowodzi ciągłości $f*h$.

Ten sam argument, z $D^\alpha h$ w miejsce h, dowodzi ciągłości $f * D^\alpha h$ – dla dowolnego wielowskaźnika α. Aby wykazać, że $f*h$ jest klasy C^∞ wystarcza zatem udowodnić tożsamość $\boxtimes$

Oczywiście wystarczy ją sprawdzić dla pojedynczej pochodnej cząstkowej, dalej wynika przez indukcję.

Dla ustalonego $i \in \{1,2,\dots,n\}$ i $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\frac{(f*h)(x+te_i)-(f*h)(x)}{t} \overset{\otimes}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(x+te_i-y)-h(x-y)}{t} f(y)\,d\lambda_n(y)$$

Chcielibyśmy przejść z t do zera, sprawdzimy w tym celu, że prawa strona spełnia założenia tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Mamy mianowicie

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(x+te_i-y)-h(x-y)}{t} f(y) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x-y) f(y)$$

a z twierdzenia o wartości średniej

$$\left|\frac{h(x+te_i-y)-h(x-y)}{t}\right| \le \frac{|t| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|Dh(z)\|}{|t|} = \sup_{\mathbb{R}^n} \|Dh\|,$$

skończone, bo Dh jest klasy C^∞ i ma nośnik zwarty.

Stąd funkcje podcałkowe są wspólnie ograniczone przez $\sup_{\mathbb{R}^n} \|Dh\| \cdot |f|$, a ta funkcja jest całkowalna.

Przechodząc w $\otimes$ z t do 0 dostajemy teraz.

Twierdzenie: Niech f będzie funkcją ciągłą o nośniku zwartym, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, zaś $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ niech będzie jedynką aproksymatywną.

Wówczas $f * \varphi_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}^n$.

Dowód: Ustalmy $\eta > 0$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła (dlaczego?), dobierzmy więc $\delta > 0$ tak, by dla $\|x-z\| < \delta$ zachodziło $|f(x) - f(z)| < \eta$.

Niech teraz $\varepsilon \in (0, \delta)$.

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\varphi_\varepsilon(z)\, d\lambda_n(z) - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z)\, d\lambda_n(z) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-z) - f(x))\varphi_\varepsilon(z)\, d\lambda_n(z) \right|$$

$$\le \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-z) - f(x)|\varphi_\varepsilon(z)\, d\lambda_n(z) < \eta \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(z)\, d\lambda_n(z) = \eta.$$

tu można napisać $\mathbb{R}^n$

bo dla $z \in B(0,\varepsilon)$ $\|(x-z) - x\| < \varepsilon < \delta$.

bo $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ poza $B(0,\varepsilon)$

Stąd $f * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows f$. □

Wniosek: Przy założeniach powyższego twierdzenia (tj. $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$)

$f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f$.

Dowód: Wystarczy zauważyć (zadanko), że jeżeli $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$, to $\operatorname{supp}(f * \varphi_\varepsilon) \subset B(0, R+\varepsilon)$, więc dla $0<\varepsilon \le \delta$ mamy

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)|\, d\lambda_n(x)}_{\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_1} = \int_{B(0,R+\delta)} |f * \varphi_\varepsilon - f|\, d\lambda_n < \underbrace{\eta\, \lambda_n(B(0, R+\delta))}$$

i dobierając dost. małe $\eta > 0$ możemy prawą stronę uczynić dowolnie małą □.

Kolejny krok to dowód, że funkcje całkowalne można dobrze przybliżać funkcjami ciągłymi o nośniku zwartym:

<u>Twierdzenie</u> Funkcje ciągłe o nośniku zwartym tworzą gęsty podzbiór przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$, tzn.

$$\forall_{f\in L^1(\mathbb{R}^n)}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{g\in C_0(\mathbb{R}^n)}\ \|f-g\|_1<\varepsilon. \quad (\star)$$

<u>Dowód</u>: Ustalmy $\varepsilon>0$.
Zacznijmy od prostej obserwacji:
Każda funkcja mierzalna i nieujemna na $\mathbb{R}^n$ jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych f_i postaci $f_i=\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\chi_{A_{ij}}$, gdzie $a_{ij}>0$ i zbiory A_{ij} są ograniczone i mierzalne, rzecz jasna.

(wystarczy wziąć niemalejący ciąg $\tilde{f}_i\nearrow f$, $\tilde{f}_i$ proste i przyjąć $f_i=\tilde{f}_i\cdot\chi_{B(0,i)}$).

Dalej dowodzimy $(\star)$ metodą kolejnych komplikacji.

<u>Krok 1</u> $f=\chi_A$, gdzie A jest mierzalny i ograniczony.

Istnieją zbiory $\underset{\text{domknięty}}{F}\subset A\subset\underset{\substack{\text{otwarty}\\ \text{ograniczony}}}{\Omega}$ takie, że $\lambda_n(\Omega\setminus F)<\varepsilon$.

Z Lematu Urysohna istnieje funkcja ciągła g taka, że $0\le g\le 1$, $g\equiv 1$ na F i $g\equiv 0$ poza Ω.
Oczywiście wtedy $g\in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Mamy $\|f-g\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f-g|\,d\lambda_n = \int\limits_{F} |f-g|\,d\lambda_n + \int\limits_{\Omega\setminus F} |f-g|\,d\lambda_n +$

tu obie funkcje są równe 1

tu obie funkcje są między 0 a 1, więc $|f-g| \le 1$

$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |f-g|\,d\lambda_n$ $\;=\;$ $\int\limits_{\Omega\setminus F} |f-g|\,d\lambda_n \le 1\cdot\lambda_n(\Omega\setminus F) < \varepsilon.$

tu obie funkcje są równe 0.

<u>Krok 2</u> $\quad f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, gdzie A_i są mierzalne, ograniczone, $a_i > 0$.

Dla $i = 1, 2, \ldots, m$ znajdujemy (z Kroku 1.) funkcje $g_i \in C_0(\mathbb{R}^n)$ takie, że $\|\chi_{A_i} - g_i\|_1 < \frac{\varepsilon}{m a_i}$.
Wtedy, z nierówności trójkąta, $\| f - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i g_i}_{g} \|_1 < \varepsilon$, oczywiście $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

<u>Krok 3</u> $\quad f$ jest nieujemną funkcją całkowalną.

Niech (f_i) będzie niemalejącym ciągiem funkcji prostych, $f_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \chi_{A_{ij}}$, gdzie A_{ij} są mierzalne i ograniczone.

Z tw. o zbieżności monotonicznej (albo też z tw. o zbieżności zmajoryzowanej, co wolimy), $\|f - f_i\|_1 \xrightarrow{i\to\infty} 0$, więc istnieje i takie, że $\|f - f_i\|_1 < \varepsilon/2$. Następnie z Kroku 2. znajdziemy $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ takie, że $\|f_i - g\|_1 < \varepsilon/2$. Wtedy $\|f-g\|_1 \le \|f - f_i\|_1 + \|f_i - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Krok 4 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f = f_+ - f_-$, gdzie f_+ i f_- są całkowalne, nieujemne.

Przybliżamy oddzielnie f_+ i f_-: znajdujemy $g^+, g^- \in C_0(\mathbb{R}^n)$ t.ż. $\|f_+ - g^+\|_1 < \varepsilon/2$, $\|f_- - g^-\|_1 < \varepsilon/2$.

Wtedy $g = g^+ - g^- \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\|f-g\|_1 \le \|f_+ - g^+\| + \|f_- - g^-\| < \varepsilon$.

□.

Twierdzenie: Niech (φ_ε) będzie jedynką aproksymatywną. Dla każdej $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi $f*\varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^1} f$.

Wniosek: Funkcje gładkie tworzą zwarty podzbiór $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie: Wykazać, że również funkcje gładkie o nośniku zwartym są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$

Wskazówka: Jeżeli $f\equiv 0$ poza $B(0,R)$, to $f*\varphi_\varepsilon\equiv 0$ poza $B(0,R+\varepsilon)$.

Dowód twierdzenia

Do funkcji $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ustalmy $\eta>0$ i dobierzmy $g\in C_0(\mathbb{R}^n)$ taką, że $\|f-g\|_1 < \eta/3$.

Wtedy

$$\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_1 \le \|(f-g)*\varphi_\varepsilon\|_1 + \|g*\varphi_\varepsilon - g\|_1 + \|g-f\|_1$$

$\eta/3$ z założenia

to dąży do 0 przy $\varepsilon\to 0$, bo $g\in C_0(\mathbb{R}^n)$, więc $\exists_{\varepsilon_0}\ \forall_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ to jest $< \eta/3$

i na koniec

$$\|(f-g)*\varphi_\varepsilon\|_1 \le \|f-g\|_1\cdot\|\varphi_\varepsilon\|_1 < \eta/3\cdot 1$$

Stąd, o ile tylko $\varepsilon<\varepsilon_0$, mamy $\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_1 < \eta$, co dowodzi tezy. □.