

Miara powierzchniowa

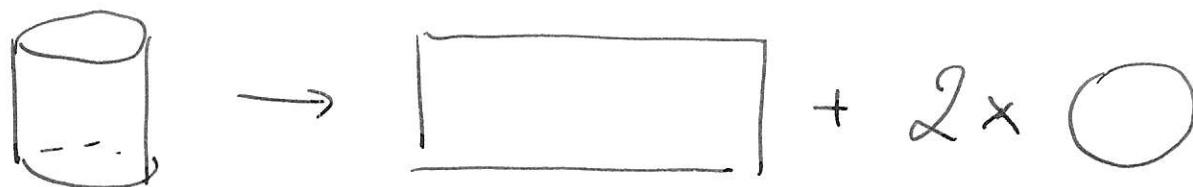
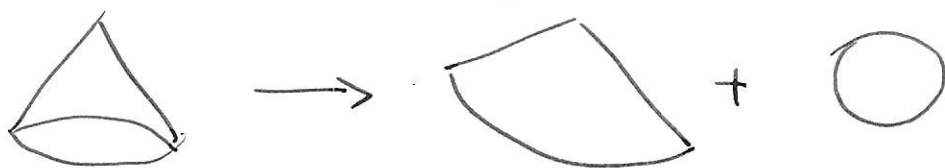
Chcemy mieć miernic nie tylko (mianalno),
podobny płaski.

Powierzchnia Polski: ~ 312 tys km²

ale Polska jest, w pewnym przybliżeniu,
podobna sferze, czy też, geoidy - pewnej
powierzchni dwuwymiarowej. Gdy obliczamy
powierzchnię ^{prostokątnego} pola kapusty na łąkach
czy działki pod budynkiem w Warszawie, możemy
założyć, że są one płaskie (tj. utożsamiać
z pewnym podzbiorem \mathbb{R}^2) - i tak się
robi. Ale przy miarzeniu powierzchni kraju
(np. takiego jak Rosja czy Chiny) popełniamy
duży błąd.

A pole powierzchni ~~bocznej~~ figur przestrzennych?

Dla stożka czy walca



~~możemy~~ przekształcić kawał
możemy podzielić figurę na kilka
kawałków, z których każdy daje się
przekształcić izometrycznie na podzbiór płaskiny.

A pole powierzchni kuli?

Co to znaczy, że jest równe $4\pi r^2$?

Z tego typu problemami zmagaliśmy się
już przy obliczaniu długości \mathbb{R} krzywej.
Tam poradziliśmy sobie biorąc

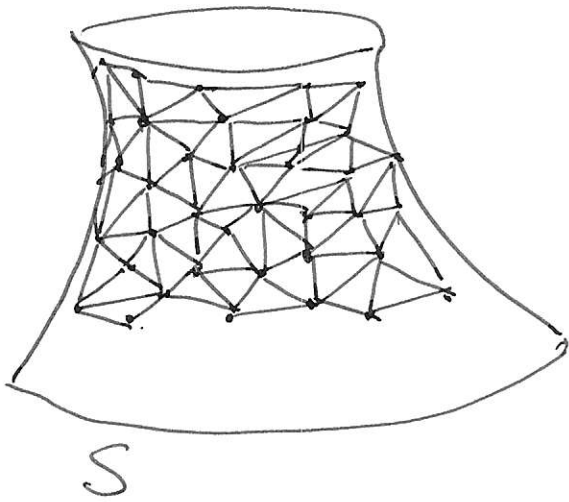
$l(\gamma) = \sup(l(T))$, gdzie T jest łamane
wpisaną w γ . Gdy r średnica podziału
związanego z łamane, czyli \sup małe
do zera, $l(T)$ coraz lepiej przybliża γ .
i $l(T) \rightarrow l(\gamma)$.

\mathbb{R} $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest jednost. ciągła,

wybieramy drobny podział odc. $[0,1]$

||
wybieramy dost. blisko siebie punkty na krzywej γ

No to pomysły na mierzenie pola powierzchni:



wybieramy dost. gęsto, skończoną sieć N punktów na naszej powierzchni

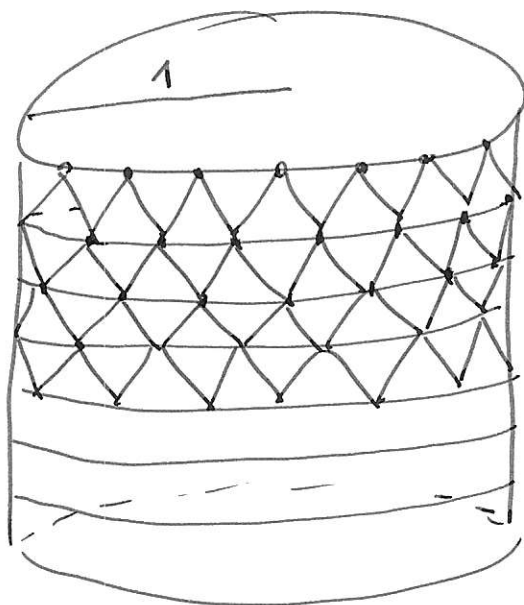
Trójmy punkty z N tworząc trójkąty. Dostajemy pewien wielościan srednica W który przybliża S

$\delta(W) = \text{srednica } W = \max \text{ długości krawędzi}$

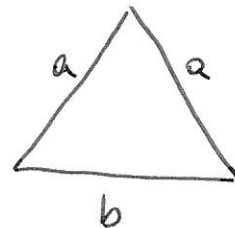
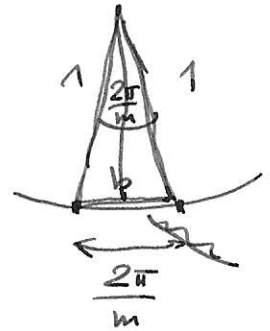
$P(S) \stackrel{?}{=} \sup P(W) ?$

$\lim_{\delta(W) \rightarrow 0} P(W) ?$

Chińska latarnia H. Schwarza.



walec



$$b^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{m} = 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{m} \right)$$



Wyznacznik Grama

Jørgen Pedersen Gram (1850-1916)
duński matematyk i aktuariusz,
wkład w analityczną teorię liczb
i statystyk matematycznych.

Niech $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

Macierz Grama wektorów v_1, \dots, v_m nazywamy macierz

$G(v_1, \dots, v_m)$ o wyrazach $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

$M^{m \times m}$

Wyznacznikiem Grama tego układu wektorów nazywamy $\det G(v_1, \dots, v_m)$, ozn. $\text{Gram}(v_1, \dots, v_m)$ lub, dla zmylenia przeciwnika, również $G(v_1, \dots, v_m)$

Kluczowa własność: $\text{Gram}(v_1, \dots, v_m)$ to kwadrat objętości (tj m -wym. miary Lebesgue'a) równoległoscianu rozpiętego przez wektory v_1, \dots, v_m .

Dowód (tylko w przypadku $m=n$, proszę zastanowić się, jak to zrobić na $m < n$).

Rozważmy przekształcenie liniowe $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $Te_i = v_i$.

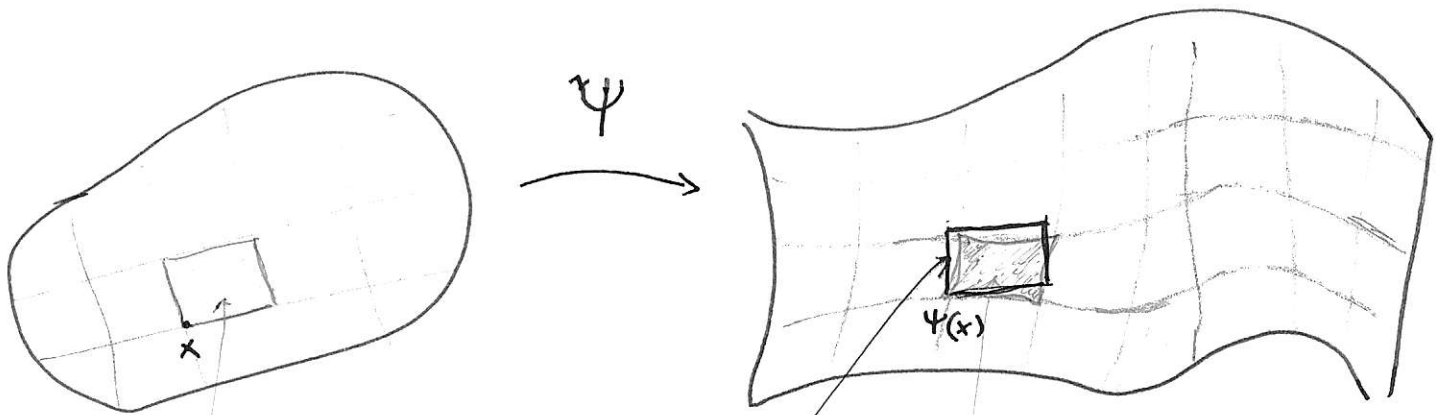
Wtedy oczywiście macierz T ma postać (v_1, \dots, v_n) ,
 $G(v_1, \dots, v_n) = T^T \cdot T$, $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) = \det(T^T \cdot T) = (\det T)^2$.

Z drugiej strony równoległościom rozpięty przez v_1, \dots, v_n to $T(Q)$, gdzie $Q = [0, 1]^n$.

Stąd $\lambda_n(T(Q)) = |\det T| \cdot \lambda_n(Q) = |\det T|$.

□.

Niech teraz $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie k -wymiarową, rozmaitością zamkniętą klasy C^1 . Wtedy M jest „poszywana” z kawałkami - płasków, dla których mamy parametryzację:



$U \subset \mathbb{R}^k$
zbiór otwarty

(mała kostka w \mathbb{R}^k)
mały kwadracik K
obokach równoległych
do osi współrzędnych

$\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametryzacja:
homeomorfizm U na $\psi(U)$,
 $D\psi(x)$ ma dla $x \in U$ rząd
maksymalny (tzn. k).

$\psi(x) + D\psi(x)(K-x)$

$\psi(K)$

Im mniejszy jest kwadracik K , tym lepiej równoległościom $\psi(x) + D\psi(x)(K-x)$ przybliża $\psi(K)$.

Macierz przekształcenia afinicznego

$T(y) = \Psi(x) + D\Psi(x)(y-x)$ to po prostu $D\Psi(x)$,
więc $\lambda_k(T(K)) = |\det T| \lambda_k(K) =$

$$= \text{Gram}(D\Psi(x)e_1, D\Psi(x)e_2, \dots, D\Psi(x)e_k) \lambda_k(K).$$

$$= \sqrt{\det(D\Psi(x)^T D\Psi(x))} \lambda_k(K).$$

Jeżeli teraz $A \subset U$ jest zbiorem mierzalnym,

to miarę powierzchniową zbioru $\Psi(A) \subset M$

definiujemy jako

$$\sigma_k(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(x)^T D\Psi(x))} d\lambda_m(x).$$

W ten sposób definiujemy miarę na M
- tylko czy definicja ta nie zależy
od wyboru parametryzacji? od sposobu
podzielenia $I \subset M$ między dziedziły map (tu
płaty)?

Na pytania te odpowiemy za chwilę, na
razie obliczmy objętość trójwymiarowej sfery
jednostkowej

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$$

Wystarczy oczywiście wyznaczyć objętość „półsfery północnej” $N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, x_4 > 0\}$,

objętość całej sfery S^3 to dwukrotność objętości N .

N jest płatem: jeżeli przez \mathbb{B}^3 oznaczymy kulę jednostkową w \mathbb{R}^3 , to $\{\mathbb{B}^3 = \{z \in \mathbb{R}^3 : \|z\| < 1\}\}$

$$\Psi : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3, \sqrt{1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)})$$

prekształca \mathbb{B}^3 w N , mamy też

$$d\Psi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \parallel \\ \nu_1 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \parallel \\ \nu_2 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \parallel \\ \nu_3 \end{matrix}$

widać, że $d\Psi(z)$ ma rząd 3, czyli maksymalny.

$$d\Psi(z)^T d\Psi(z) = G(\nu_1, \nu_2, \nu_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{z_1^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & 1 + \frac{z_2^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} & 1 + \frac{z_3^2}{1-\|z\|^2} \end{pmatrix},$$

$$D\psi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} & \frac{-z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} & \frac{-z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$$1 + \frac{z_1^2}{1-\|z\|^2} = \frac{1-z_1^2-z_2^2-z_3^2}{1-\|z\|^2}$$

$$D\psi(z)^T \cdot D\psi(z) = G G^T (v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{z_1^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & 1 + \frac{z_2^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} & 1 + \frac{z_3^2}{1-\|z\|^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(D\psi(z)^T \cdot D\psi(z)) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\|z\|^2} \right)^3 \det \begin{pmatrix} 1-z_2^2-z_3^2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 \\ z_1 z_2 & 1-z_1^2-z_3^2 & z_2 z_3 \\ z_1 z_3 & z_2 z_3 & 1-z_1^2-z_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1-\|z\|^2)^3} \left((1-z_2^2-z_3^2)(1-z_1^2-z_3^2)(1-z_1^2-z_2^2) + \right. \\ \left. + 2z_1^2 z_2^2 z_3^2 - z_1^2 z_3^2 (1-z_1^2-z_3^2) - \right. \\ \left. - z_2^2 z_3^2 (1-z_2^2-z_3^2) - z_1^2 z_2^2 (1-z_1^2-z_2^2) \right)$$

$$\text{więc } \det(D\Psi(z)^T D\Psi(z)) =$$

$$= \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^3} \det \begin{pmatrix} 1 - z_2^2 - z_3^2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 \\ z_1 z_2 & 1 - z_1^2 - z_3^2 & z_2 z_3 \\ z_1 z_3 & z_2 z_3 & 1 - z_1^2 - z_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow = \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^3} (1 - \|z\|^2)^2 = \frac{1}{1 - \|z\|^2}$$

trochę
rachunkowo

$$\text{i ostatecznie } \sigma_3(N) = \int_{\mathbb{B}^3} \frac{1}{\sqrt{1 - \|z\|^2}} d\lambda_3(z) =$$

$$= \int_0^1 \int_{S^2} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} r^2 d\sigma_2(s) d\lambda_1(r) =$$

(ds dr)

$$= \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2}} \left(\int_{S^2} d\sigma_2(s) \right) dr =$$

pole sfery jednostkowej
w \mathbb{R}^3 , a więc 4π

$$= 4\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \pi^2, \text{ więc } \sigma_3(S^3) = 2\pi^2$$

Przypomnienie

Zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest m -wymiarową rozmaitością klasy C^k , jeżeli (równoważnie)

każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie

- 1) $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $U_1 \cap M$ jest wykresem pewnej funkcji klasy C^k (tj. istnieje podprzestrzeń liniowa P i P^\perp przestrzeni \mathbb{R}^n takie, że $\mathbb{R}^n = P \oplus P^\perp$ oraz $f_1: P \rightarrow P^\perp$ klasy C^k taka, że $U_1 \cap M = \{(x_1, f_1(x_1)) : x_1 \in P \cap U_1\}$.
- 2) $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $U_2 \cap M$ jest poziomicy regularną pewnej funkcji klasy C^k , tj. istnieje $f_2 \in C^k(U_2, \mathbb{R}^{n-m})$ takie, że $U_2 \cap M = f_2^{-1}(0)$ i dla każdego $x \in U_2 \cap M$ macierz $Df_2(x)$ ma rząd maksymalny.
- 3) $U_3 \subset \mathbb{R}^n$ takie, że: (opis parametryczny)
istnieje $V \subset \mathbb{R}^m$ otwarty \leftarrow dziedlina parametryzacji
i $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^k , $\Psi(V) = U_3 \cap M$ parametryzacja
takie, że $D\Psi$ ma w każdym punkcie zbioru V rząd maksymalny, a $\Phi = \Psi^{-1}: M \cap U_3 \rightarrow V$ jest homeomorfizmem
 \uparrow
mapa.

Uobwodzinny tenaz (niemal powtanajzc dowód
 równoważności $3) \Leftrightarrow 1)$) tak zwane twierdzenie
 o rzędzie, które w pewnym uproszczeniu mówi,
 że jeżeli rozmaitość M ma w otoczeniu $x \in M$
 parametryzacja $\Psi: V \rightarrow M \cap U$, to możemy
 tak zmienić (dyfeomorfizmami) zmienne w dziedzinie
 (V) i przeciwdziedzinie (U) parametryzacji, by
 lokalnie, w otoczeniu x , rozmaitość M była
 wykresem funkcji zerowej.

Twierdzenie o rzędzie

Niech $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^k i niech
 \cap otwarty
 \mathbb{R}^m

$D\Psi$ będzie we wszystkich punktach zbioru V
 macierzą rzędu $r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Wówczas dla każdego
 $a \in V$ istnieje otoczenia $V_1 \subset V$, $a \in V_1$ i $U \subset \mathbb{R}^n$,
 $\Psi(a) \in U$ oraz dyfeomorfizm $f_1: V_1 \rightarrow f_1(V_1) \subset \mathbb{R}^m$
 i $f_2: U \rightarrow f_2(U) \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^k takie, że
 dla wszystkich $x = (x_1, \dots, x_m) \in f_1(V_1)$ mamy
 $f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0)$.

Dawid

Skoro $D\Psi$ ma rząd maksymalny, to ma pewien nieszerowy minor $r \times r$. Bez straty ogólności, zamieniając co najwyżej numerację zmiennych, możemy założyć, że w otoczeniu $a \in V$ to minor odpowiadający funkcjom

Ψ_1, \dots, Ψ_r i zmiennymi x_1, \dots, x_r . (czyli lewy górny róg $D\Psi$).

Postójmy $f_1(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m)$

Wtedy $Df_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,r} & 0 \\ 0 & \text{id}_{(m-r) \times (m-r)} \end{pmatrix}$ ma rząd

maksymalny, równy m , oraz $\det Df_1(a) \neq 0$.

Istnieje zatem (z tw. o lokalnej odwracalności) otoczenie V_1 punktu a takie, że $f_1: V_1 \rightarrow f_1(V_1)$ jest dyfeomorfizmem.

Zmniejszając V_1 możemy dodatkowo założyć, że $f_1(V_1)$ jest przedziałem otwartym.

Wtedy $\Psi \circ f_1^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_r, h_{r+1}(x), \dots, h_m(x))$ dla pewnych funkcji h_{r+1}, \dots, h_m klasy C^k .

Łatwo widziemy, że rząd $D(\Psi \circ f_1^{-1})$ jest taki sam, jak rząd $D\Psi$ (a więc równy r), bo

$$D(\Psi \circ f_1^{-1}) = D\Psi \cdot \underbrace{D(f_1^{-1})}_{\text{izomorfizm liniowy}}$$

a to jest izomorfizm liniowy.

$$D(\Psi \circ f_1^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \text{id}_{r \times r} & 0 \\ \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=r+1, \dots, n \\ j=1, \dots, r}} & \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=r+1, \dots, n} \end{pmatrix},$$

niezależy by ta macierz mogła mieć rząd równy r , macierz $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=r+1, \dots, n}$ musi mieć rząd zero, a zatem dla $i, j = r+1, \dots, n$ mamy $\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = 0$.
To oznacza, że h_i zależy tylko od zmiennych x_1, \dots, x_r .

Niech teraz $f_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_{r+2} - h_{r+2}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_n - h_n(x_1, \dots, x_r))$.

$$\text{Wtedy } Df_2 = \begin{pmatrix} \text{id}_{r \times r} & 0 \\ -\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=r+1, \dots, n \\ j=1, \dots, r}} & \text{id}_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

niezależy by f_2 jest lokalnym dyfeomorfizmem.

Do tego łatwo widzieć, że f_2 jest na $\Psi(V_1)$ różnowartościowe:

$$f_2^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} + h_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_n + h_n(y_1, \dots, y_r)).$$

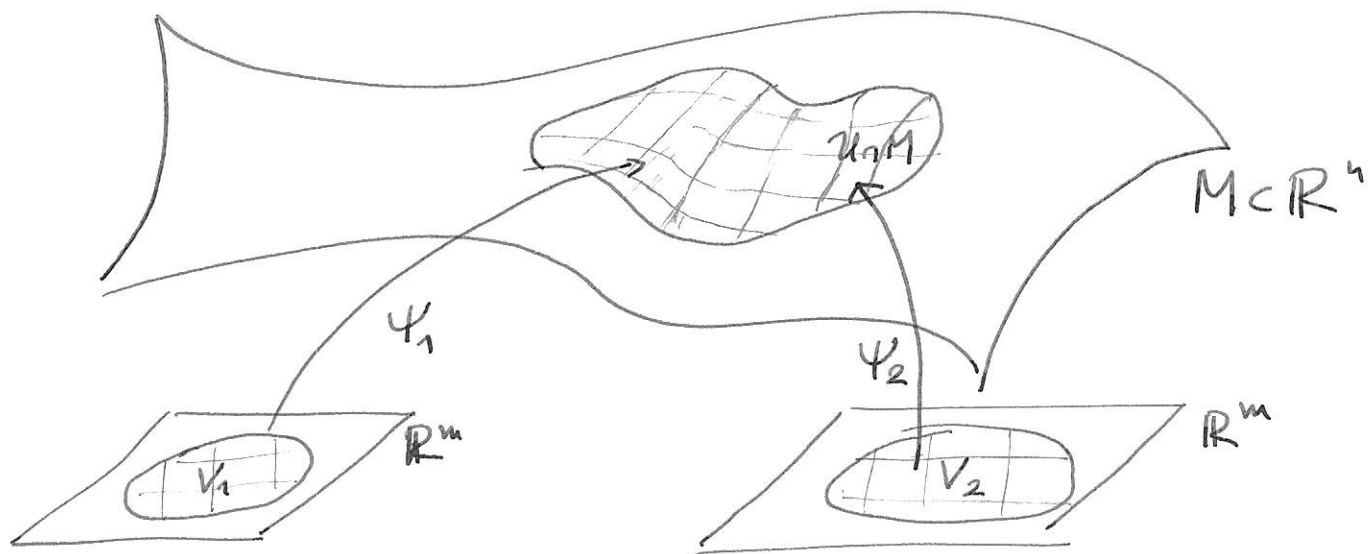
Od reki sprawdzamy, że

$$f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0),$$

co kończy dowód. \square

Wniosek:

Lemat o funkcjach przejścia



Załóżmy, że mamy dwie różne parametryzacje Ψ_1 i Ψ_2 tego samego płatu $U \cap M$ m -wymiarowej rozmaitości M klasy C^k .

Wówczas funkcje $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1 : V_1 \rightarrow V_2$ oraz $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2 : V_2 \rightarrow V_1$ (zwane funkcjami przejścia) są dyfeomorfizmami klasy C^k .

Dowód: Rozważmy, dla $a \in V_1$, dyfeomorfizmy $f_1 : \tilde{V}_1 \rightarrow f_1(\tilde{V}_1)$ i $f_2 : \tilde{U} \rightarrow f_2(\tilde{U})$, gdzie $\tilde{V}_1 \subset V_1$ jest pewnym otoczeniem a , $\tilde{U} \subset U$ — otoczeniem $\Psi(a)$

i $f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ dla $x \in f_1(\tilde{V}_1)$. (istnienie f_1 i f_2 wynika z tw. o niedzie).

Wtedy mamy

$$\mathbb{R}^m \supset \underbrace{f_1(\tilde{V}_1)}_{\psi} \xrightarrow{f_1^{-1}} \underbrace{\tilde{V}_1}_{\psi} \xrightarrow{\Psi_1} \underbrace{\tilde{U} \cap M}_{\psi} \xrightarrow{f_2} \underbrace{\mathbb{R}^m \times \{0, 0, \dots, 0\}}_{\psi} \in \mathbb{R}^n$$

$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$

możemy więc przekształcenie ~~f_1^{-1}~~ $f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}$

traktować jako przekształcenie z $f_1(\tilde{V}_1)$ w \mathbb{R}^m

- jest ono wtedy identycznością, jest zatem odwracalne:

$$f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1} \Big|_{f_1(\tilde{V}_1)} = \text{id}_{f_1(\tilde{V}_1)}$$

Zatem

$$f_1^{-1} \circ \underbrace{(f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1})^{-1}}_{\text{identyczność, wic klasy } C^k} \circ f_2 \circ \Psi_2 =$$

\uparrow dyfeomorfizm klasy C^k \uparrow dyfeomorfizm klasy C^k \uparrow klasy C^k

$$= f_1^{-1} \circ f_1 \circ \Psi_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_2 \circ \Psi_2 = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$$

jest klasy C^k .

Jako złożenie dwóch homeomorfizmów $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$ jest też homeomorfizmem.

Tak samo dowodimy, że $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ jest homeomorfizmem klasy C^k , ale $(\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2)^{-1} = \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$,

wic obie te funkcje są dyfeomorfizmami klasy C^k . \square

Korzystając z tego lematu wykazemy, że miara powierzchniowa na M nie zależy od wyboru parametryzacji.

Niech, jak w lemacie, $\Psi_1: V_1 \rightarrow U \cap M$ i $\Psi_2: V_2 \rightarrow U \cap M$ będą dwiema parametryzacjami tego samego płata $U \cap M$ i niech $D \subset U \cap M$ będzie borelowskim podzbiorem M ,

$$D = \Psi_1(A_1) = \Psi_2(A_2).$$

Z lematu o funkcjach przejścia wiemy, że funkcja $\varphi: V_2 \rightarrow V_1$, $\varphi = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$, jest dyfeomorfizmem klasy C^k . Stąd $\Psi_2 = \Psi_1 \circ \varphi$ i dla $y = \varphi(x)$ mamy $\underbrace{\varphi(A_1)}_{= A_2}$

$$\begin{aligned} D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x) &= (D\Psi_1(y) D\varphi(x))^T D\Psi_1(y) D\varphi(x) = \\ &= D\varphi(x)^T (D\Psi_1(y)^T D\Psi_1(y)) D\varphi(x), \text{ więc} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\det D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x)} = |\det D\varphi(x)| \sqrt{\det D\Psi_1(y)^T D\Psi_1(y)}$$

Mamy

$$\sigma_m(D) = \int_{A_1} \sqrt{\det D\Psi_1(x)^T D\Psi_1(x)} d\lambda_m(x)$$

czy to jest równe

$$\int_{A_2} \sqrt{\det D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x)} d\lambda_m(x) ?$$

Tak, wynika to z obliczeń z poprzedniej strony i tw. o zmianie zmiennych: kładąc w drugiej z ciałek $y = \varphi(x)$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{A_2} \sqrt{\det D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x)} d\lambda_m(x) &= \int_{\varphi^{-1}(A_2)} \sqrt{\det D\Psi_1(y)^T D\Psi_1(y)} \\ &= \int_{A_1} \sqrt{\det D\Psi_1(y)^T D\Psi_1(y)} |\det D\varphi(x)| d\lambda_m(x) = \end{aligned}$$

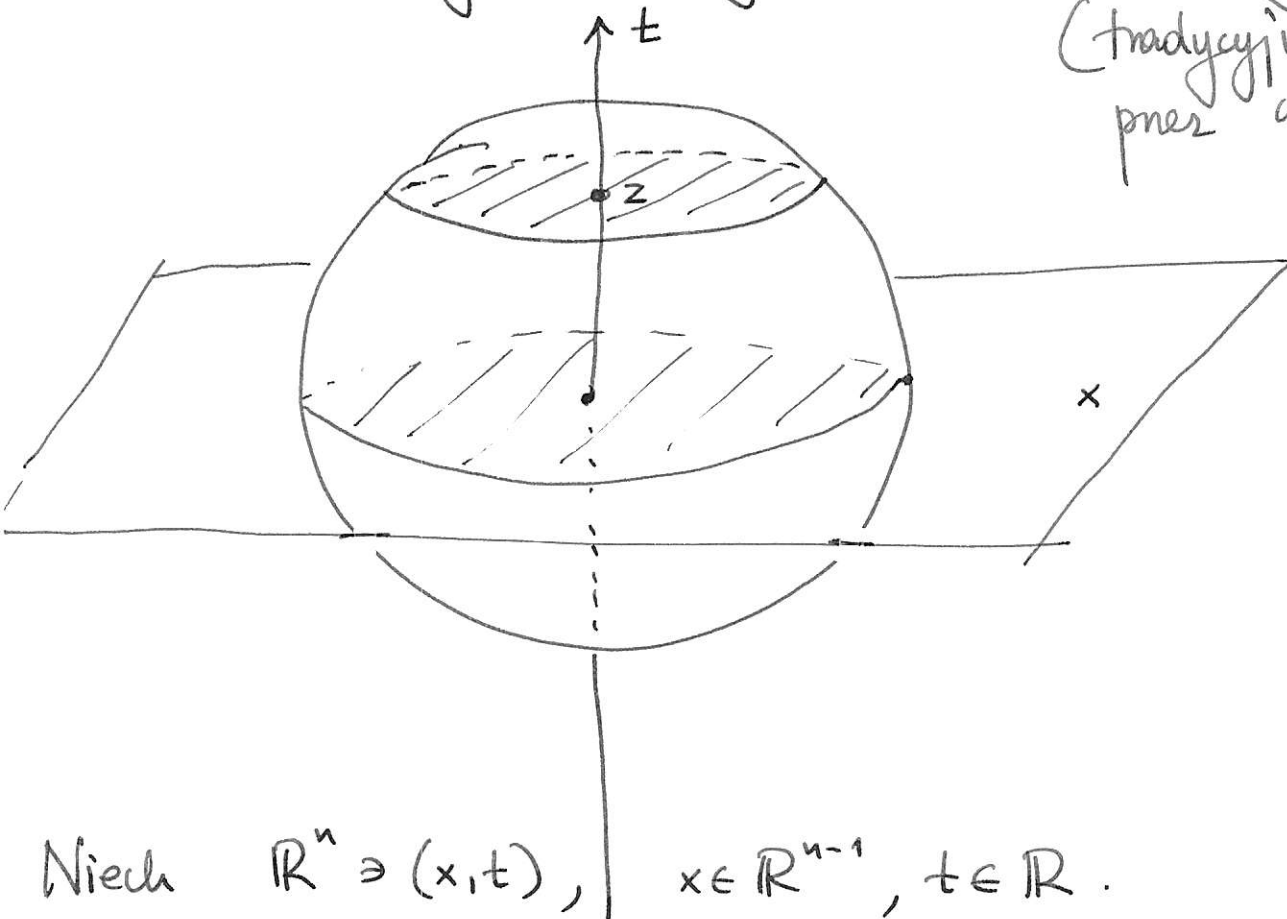
$$\begin{aligned} &\stackrel{y=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi^{-1}(A_2)} \sqrt{\det D\Psi_1(y)^T D\Psi_1(y)} d\lambda_m(y). \\ &\quad \parallel \\ &\quad A_1 \end{aligned}$$

Stąd dla zbiorów borelowskich zawartych w pojedynczym płacie miara powierzchniowa nie zależy od wyboru parametryzacji. Każdy borelowski podzbiór M możemy podzielić na kawałki leżące w pojedynczych płatach.

Remnant

Miara kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n .

Oznaczmy ją
(tradycyjnie)
przez ω_n .



Niech $\mathbb{R}^n \ni (x, t)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$.

Przekrój kuli jednostkowej B^n na wysokości $z=t$
(hiper)przecięcia równoległego do (hiper) płaszczyzny x

to kula $(n-1)$ wymiarowa o promieniu $\sqrt{1-z^2}$
(tw. Pitagorasa). Stąd pole tego przekroju
to $(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \omega_{n-1}$ (dlaczego?).

$$\text{Dlatego } \omega_n = \int_{-1}^1 (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1} dz = \omega_{n-1} \cdot 2 \int_0^1 (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz =$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^1 (1-s)^{\frac{n-1}{2}} s^{-1/2} ds = \omega_{n-1} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} s &= z^2 \\ z &= \sqrt{s} \\ dz &= \frac{1}{2} s^{-1/2} ds \end{aligned}$$

gdzie $B(a, b) = \int_0^1 (1-s)^{a-1} s^{b-1} ds$ to funkcja
Beta Eulera.

Stąd dalej

$$\omega_n = \omega_{n-1} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \omega_{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Pamiętamy, że $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\omega_1 = 2$, więc

$$\omega_n = \omega_{n-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot \sqrt{\pi} = \omega_{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} (\sqrt{\pi})^2$$

$$= \dots = \omega_1 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} (\sqrt{\pi})^{n-1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Zadanie: Postępując analogicznie jak przy obliczeniu $\sigma_3(\mathbb{S}^3)$ udowodnić, że $\sigma_n(\mathbb{S}^n) = n\omega_n$.

Przydatny trick przy obliczaniu wyznacznika Grama:

Wzór Cauchy'ego - Bineta

Niech $A \in M^{m \times n}$ $m \leq n$

$B \in M^{n \times m}$

Wtedy AB jest macierzą $m \times m$. Jak sprawnie obliczyć $\det AB$?

Jacques Philippe Marie Binet

1786 - 1856

uczył w École Polytechnique,
przyjaciel Cauchy'ego;
osiągnięcia w geometrii, teorii liczb;
jeden z wzorów na wyrazy ciągu
Fibonacci'ego; funkcja B Eulera
w nieumyślności wprowadzona została
przez Bineta.

Dowód wzoru Cauchy'ego-Binet'a

Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

Wtedy $AB = \sum_j a_{ij} b_{jk}$, więc

k -ta kolumna $AB = \sum_j b_{jk} \cdot j$ -ta kolumna A

stąd $\det AB = \sum_{j_1} b_{j_1,1} \cdot \det$ (macierz AB , której w pierwszej kolumnie podniesiemy wyrazy, ktoc j_1 -wsz kolumn macierzy A)

robisz tak dalej, z kolejnymi kolumnami, dostajemy

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^n b_{j_1,1} \cdot b_{j_2,2} \cdot \dots \cdot b_{j_m,m}$$

• \det (macierz, której k -ta kolumna to j_k -ta kolumna macierzy A , czyli $(A_{kol j_1}, A_{kol j_2}, \dots, A_{kol j_m})$)

tutaj oczywiście często $j_k = j_l$, ale wtedy wyznacznik jest równy 0. stąd, grupując wyrazy różniące się tylko kolejno kolumn,

$$= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n \\ S = \{j_1, \dots, j_m\}}} p(B, S) \det A(S)$$

gdzie $p(B, S)$ to współczynniki zależne od macierzy B i podzbioru S (ale już niezależne od A).

Aby wyznaczyć $p(B, S)$ ustalmy $S = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$

i niech $A \# = \begin{pmatrix} 0, 0, e_{j_1}, e_{j_2}, 0, e_{j_3}, \dots, e_{j_m}, 0 \end{pmatrix}$

będzie macierzą, której j_k -ta kolumna to e_k , a pozostałe są równe zero.

Wzór Cauchy'ego - Bineta:

Niech $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$

$A(S)$ to macierz $m \times m$ powstająca z A
przez wybranie kolumn o indeksach i_1, \dots, i_m

$B(S)$ to macierz $m \times m$ powstająca z A
przez wybranie wierszy o indeksach i_1, \dots, i_m

$$\det AB = \sum_{\text{po wszystkich wyborach } S} \det A(S) \cdot \det B(S).$$

Przykład: Przy obliczaniu $\sigma_3(\mathbb{S}^3)$ wyznaczaliśmy
 $\det(D\psi(z)^T D\psi(z))$, gdzie $A = D\psi(z)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}$

$$B = D\psi(z) = A^T.$$

Kolejne $A(S)$ powstają przez wybranie z A jednej kolumny; $B(S)$ - przez wybranie z B tego samego wiersza; więc $\det A(S) = \det B(S)$;

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{i=1}^3 \left(\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{z_i}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 1 & 0 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix} \right)^2 + \\ &+ \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix} \right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix} \right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= \frac{1}{1-\|z\|^2} \left[\left(\det \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & 0 & 0 \\ 0 & -z_2 & 1 & 0 \\ 0 & -z_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & -z_1 & 0 \\ 0 & -z_2 & 0 \\ 0 & -z_3 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & -z_2 \\ 0 & 0 & -z_3 \end{pmatrix} \right)^2 \right] + 1 = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{1-\|z\|^2} + 1 = \frac{1}{1-\|z\|^2} \end{aligned}$$

Wtedy $\det A(s) = 1$, ale dla wszystkich $s' \neq s$ $\det A(s') = 0$.

Mamy też $AB = B(s)$. Stąd

$$\begin{aligned}\det B(s) &= \det AB = \sum_{s'} \beta(B, s') \det A(s') = \\ &= \beta(B, s) \det A(s) = \beta(B, s).\end{aligned}$$

To kończy dowód wzoru Cauchy'ego - Bineta.

Przykład zastosowania

Niech $V \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym, $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ i niech $W = \{(x, \varphi(x)) : x \in V\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ będzie wykresem φ . Wtedy

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{1 + \|\nabla \varphi\|^2} d\lambda_m$$

Dowód:

$\Phi: V \ni x \mapsto (x, \varphi(x)) \in W$ jest parametryzacja wykresu,

wzrost

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)} d\lambda_m$$

$$D\Phi = \left(\text{id}_m, \nabla \varphi \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \varphi_{x_1} \\ 0 & 1 & & 0 & \varphi_{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \varphi_{x_n} \end{pmatrix}$$

wykreślając kolejne kolumny dostajemy macierze kwadratowe

o wyznacznikach $\pm \varphi_{x_1}, \pm \varphi_{x_2}, \dots, \pm \varphi_{x_n}, 1$, więc

$$\det(D\Phi^T \cdot D\Phi) = 1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \dots + \varphi_{x_n}^2 = 1 + \|\nabla \varphi\|^2.$$