Twierdzenie: Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$. Wówczas dla dowolnego mierzalnego zbioru $E \subset \mathcal{U}$ zbiór $F(E)$ też jest mierzalny oraz

$$\lambda_n(F(E)) \overset{\star}{\leq} L^n \lambda_n(E).$$

Dowód poprzez serię Lematów

Lemat 1 Niech $\overline{B} \subset \mathcal{U}$ będzie kulą domkniętą. Wówczas $\lambda_n(F(\overline{B})) \leq L^n \lambda_n(\overline{B})$

Dowód: Po pierwsze, zauważmy, że $\overline{B}$ jest zbiorem zwartym, więc $F(\overline{B})$ też jest zwarty $\Rightarrow F(\overline{B})$ jest mierzalny. Dalej, niech x będzie środkiem $\overline{B}$, a r - jej promieniem. Wtedy $\forall_{y \in B} \; \|F(y) - F(x)\| \leq L\|y-x\| \leq Lr$, więc

$$F(\overline{B}) \subset \overline{B}(F(x), Lr) \Rightarrow \lambda_n(F(\overline{B})) \leq \lambda_n(\overline{B}(F(x), Lr))$$
$$= L^n \lambda_n(\overline{B})$$

Lemat 2 Istnieje stała $C(n)$ (zależna tylko od wymiaru n) taka, że każdy przedział $P \subset \mathcal{U}$ można pokryć skończoną rodziną kul $\{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_m\}$ takich, że $\sum_{i=1}^{m} \lambda_n(\overline{B}_i) \leq C(n) \lambda_n(P)$.

Dowód: Dzielimy P na przedziały „kostkopodobne":
oznaczmy krawędzie przedziału P przez $b_1, \dots, b_n$,
$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$; k-tą krawędź P dzielimy na $\left\lfloor \frac{b_k}{b_1} \right\rfloor$
równych części — w ten sposób dzielimy P na
$\prod_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{b_k}{b_1} \right\rfloor = m$ mniejszych, identycznych przedziałów $\{P_i\}$,
o krawędziach $b_1, \frac{b_2}{\lfloor b_2/b_1 \rfloor}, \frac{b_3}{\lfloor b_3/b_1 \rfloor}, \dots, \frac{b_n}{\lfloor b_n/b_1 \rfloor}$.

Łatwo widać, że $b_1 = \frac{b_k}{b_k/b_1} \leq \frac{b_k}{\lfloor b_k/b_1 \rfloor} = b_1 \frac{b_k/b_1}{\lfloor b_k/b_1 \rfloor} \leq 2b_1$
i $\lambda_n(P_i) \geq b_1^n$.

gdy $\alpha > 1$, to $1 \leq \alpha / \lfloor \alpha \rfloor < 2$.

Stąd wynika, że przedział P_i jest zawarty w kostce Q_i, koncentrycznej z P_i, o krawędzi $2b_1$, ta zaś - w kuli $\overline{B_i}$ opisanej na Q_i, o promieniu $b_1\sqrt{n}$.
Oznaczmy przez ω_n miarę Lebesgue'a kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$, wtedy miara kuli o promieniu r wynosi $r^n \omega_n$ (dlaczego?)

Mamy $P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B_i}$; $\sum_{i=1}^{m} \lambda_n(\overline{B_i}) = \sum_{i=1}^{m} b_1^n n^{n/2} \omega_n =$

$$= n^{n/2} \omega_n \sum_{i=1}^{m} b_1^n \leq n^{n/2} \omega_n \sum_{i=1}^{m} \lambda_n(P_i) =$$
$$= n^{n/2} \omega_n \lambda_n(P).$$

$\square$.

Lemat 3 Dla dowolnego prostopadłościanu $P \subset \mathcal{U}$ zachodzi nierówność $\lambda_n(F(P)) \leq C(n) L^n \lambda_n(P)$.

Dowód: Jak poprzednio, $F(P)$ jest obrazem zbioru zwartego w przekształceniu ciągłym $\Rightarrow$ jest zbiorem zwartym, w szczególności mierzalnym.

Niech $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_m$ będą kulami jak w Lemacie 2.

Wtedy $F(P) \subset F(\overline{B}_1) \cup F(\overline{B}_2) \cup \dots \cup F(\overline{B}_m)$, więc

$$\lambda_n(F(P)) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_n(F(\overline{B}_i)) \underset{\text{Lemat 1}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} L^n \lambda_n(\overline{B}_i) \underset{\text{Lemat 2}}{\leq} C(n) L^n \lambda_n(P).$$

□

Lemat 4 Dla dowolnego mierzalnego $E \subset \mathcal{U}$ zachodzi nierówność $\lambda_n^*(F(E)) \leq C(n) L^n \lambda_n(E)$.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie takim pokryciem zbioru E prostopadłościanami, że $\sum_{i=1}^{\infty} vol(P_i) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon$.

Wtedy $F(E) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F(P_i)$, więc

$$\lambda_n^*(F(E)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(F(P_i)) \underset{\text{Lemat 3}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} C(n) L^n \lambda_n(P_i) \leq$$

tu można napisać λ_n, bo $F(P_i)$ jest mierzalny

$$\leq C(n) L^n (\lambda_n(E) + \varepsilon)$$

Ta nierówność zachodzi dla wszystkich $\varepsilon > 0$, więc

$$\lambda_n^*(F(E)) \leq C(n) L^n \lambda_n(E).$$ □

Wniosek 1. F przekształca zbiory miary zero w zbiory miary zero.

Wniosek 2 F przekształca zbiory mierzalne na mierzalne

Dowód Wystarczy udowodnić, że gdy $E \subset \mathcal{U}$ jest ograniczonym zbiorem mierzalnym, to $F(E)$ też jest mierzalny. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech K będzie zbiorem domkniętym takim, że $K \subset E$ i $\lambda_n(E \setminus K) < \frac{\varepsilon}{C(n) L^n}$.

Mamy $E = K \cup (E \setminus K)$, więc $F(E) = F(K) \cup F(E \setminus K)$

$\Rightarrow F(E) \setminus F(K) \subset F(E \setminus K)$.

Zbiór K jest domknięty i ograniczony $\Rightarrow$ jest zwarty. Stąd również $F(K)$ jest zwarty. Mamy też

$$\lambda_n^*\left(F(E) \setminus F(K)\right) \leq \lambda_n^*\left(F(E \setminus K)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemat 4}}}{\leq} C(n) L^n \lambda_n(E \setminus K) < \varepsilon.$$

A więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty zawarty w $F(E)$ taki, że różnica $F(E)$ i tego zbioru ma miarę zewnętrzną $< \varepsilon$. To dowodzi, że $F(E)$ jest mierzalny.

Lemat 5 (wariant Lematu Vitaliego)

Przedział można, z dokładnością do zbioru miary zero, wypełnić rozłącznymi kulami domkniętymi.

Precyzyjniej: Niech $P \subset \mathcal{U}$ będzie przedziałem. Istnieje wówczas ciąg $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \ldots$ rozłącznych kul domkniętych zawartych w P, być może skończony, taki, że $\lambda_n(P \setminus \bigcup_i \overline{B}_i) = 0$.

Dowód na koniec.

Przejdźmy do dowodu twierdzenia.

Krok 1 Udowodnimy, że nierówność ☆ z tezy twierdzenia zachodzi dla dowolnego przedziału $P \subset \mathcal{U}$.

Z Lematu 5 istnieją kule $\overline{B_1}, \overline{B_2}, \ldots$ parami rozłączne, zawarte w P i takie, że $\lambda_n(P \setminus \bigcup_i \overline{B_i}) = 0$.

Wtedy $F(P) = F(P \setminus \bigcup_i \overline{B_i}) \cup \bigcup_i F(\overline{B_i})$, więc

$$\lambda_n(F(P)) \leq \lambda_n\underbrace{(F(P \setminus \bigcup_i \overline{B_i}))}_{\substack{\text{miary zero} \\ \text{z Wniosku 1.}}} + \sum_i \lambda_n(F(\overline{B_i}))$$

$$\underset{\text{z Lematu 1}}{\leq} 0 + \sum_i L^n \lambda_n(\overline{B_i}) \underset{\substack{\text{bo kule } \overline{B_i} \\ \text{są rozłączne}}}{\leq} L^n \lambda_n(P).$$

Krok 2 Dla dowolnego $E \subset \mathcal{U}$ mierzalnego.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\{P_i\}$ będzie pokryciem E takim, że $\lambda_n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(P_i) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon$.

Tak samo jak w Lemacie 4, tylko powołując się na Krok 1 zamiast na Lemat 3 dowodzimy, że

$\lambda_n(F(E)) \leq L^n(\lambda_n(E) + \varepsilon)$, co z dowolności $\varepsilon > 0$ daje ☆.

$\square$.

Pozostaje dowód Lematu 5:

Konstruujemy ciąg $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$ indukcyjnie.

- Oznaczmy przez $\mathcal{B}_0$ rodzinę wszystkich kul domkniętych zawartych w P i niech $d_0 = \sup\{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{średnica}}}{\operatorname{diam}} \overline{B} : \overline{B} \in \mathcal{B}_0\}$.

Nie wiemy, czy to supremum jest osiągane (no dobra, wiemy, że jest — dlaczego?), ale na pewno znajdziemy w $\mathcal{B}_0$ kulę $\overline{B}_1 = \overline{B}(x_1, r_1)$ taką, że $\underset{\substack{\| \\ 2r_1}}{\operatorname{diam} \overline{B}_1} > \frac{1}{2} d_0$.

- Niech $\mathcal{B}_1 = \{\overline{B} \in \mathcal{B}_0 : \overline{B}$ jest rozłączna z $\overline{B}_1\}$.

  $d_1 = \sup\{\operatorname{diam} \overline{B} : \overline{B} \in \mathcal{B}_1\}$

  wybieramy $\overline{B}_2 = \overline{B}(x_2, r_2) \in \mathcal{B}_1$ taką, by $\underset{\substack{\| \\ 2r_2}}{\operatorname{diam} \overline{B}_2} > \frac{1}{2} d_1$

  $\vdots$

- Niech $\mathcal{B}_k = \{\overline{B} \in \mathcal{B}_0 : \overline{B}$ jest rozłączna z $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_k\}$

  $d_k = \sup\{\operatorname{diam} \overline{B} : \overline{B} \in \mathcal{B}_k\}$

  wybieramy $\underset{\substack{\| \\ \overline{B}(x_{k+1}, r_{k+1})}}{\overline{B}_{k+1}} \in \mathcal{B}_k$ taką, by $\operatorname{diam} \overline{B}_{k+1} > \frac{1}{2} d_k$.

Czy ta konstrukcja może się zatrzymać w k-tym kroku? Byłoby tak, gdyby dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ $d_k = 0$, a więc $\mathcal{B}_k = \emptyset$. Zauważmy jednak, że zbiór $\operatorname{int} P \setminus (\overline{B}_1 \cup \ldots \cup \overline{B}_k)$ jest zbiorem otwartym, jeżeli więc nie zawiera żadnej kuli domkniętej, to jest zbiorem pustym.

Tym samym $\operatorname{int} P \subset \overline{B}_1 \cup \ldots \cup \overline{B}_k \subset P$, więc

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}_k \subset P \setminus \operatorname{int} P$$ ← a ten zbiór jest miary zero, co dowodzi tezy (w tym przypadku).

{ W rzeczywistości ta sytuacja nie może mieć miejsca – przedziału w $\mathbb{R}^n$ dla $n \geq 2$ nie da się przedstawić, z dokł. do zbioru miary zero, jako sumy skończenie wielu rozłącznych kul, ale to dla nas mało ważne w tej chwili. }

Odtąd więc będziemy zakładać, że konstrukcję możemy ciągnąć bez przerwy, a więc dostajemy ciąg rozłącznych kul domkniętych $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$.

<u>Kluczowa obserwacja:</u> $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(\overline{B}_i) \leq \lambda_n(P)$,

więc ten szereg jest zbieżny. Stąd po kolei:

- $\lambda_n(\overline{B}_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$

$\Downarrow$

- $\operatorname{diam} \overline{B}_i$, r_i dążą do 0 przy $i \to \infty$.

$\Downarrow$

- $d_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, bo $\operatorname{diam} \overline{B}_{i+1} > \frac{1}{2} d_i > 0$.

Wróćmy teraz do k-tego kroku konstrukcji.

Niech $Y_k = \operatorname{int} P \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}_k$. Jest to zbiór otwarty, jeżeli więc $z \in Y_k$, to istnieje $r > 0$ t. ż. $\overline{B}(z,r) \subset Y_k$.

Wiemy, że $\overline{B}(z,r)$ jest rozłączna z $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_k$, więc $\overline{B}(z,r) \in \mathcal{B}_k$.

Czy może się zdarzyć, że $\forall_{m \geq k}\ \overline{B}(z,r) \in \mathcal{B}_m$?

<u>Nie</u>: jeżeli $\overline{B}(z,r) \in \mathcal{B}_m$, to $\operatorname{diam} \overline{B}(z,r) \leq d_m$, ale $d_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$, więc dla dostatecznie dużych m ta nierówność nie może być prawdziwa.

Niech zatem $m > k$ będzie takie, że $\overline{B}(z,r) \in \mathcal{B}_{m-1}$, ale $\overline{B}(z,r) \notin \mathcal{B}_m$, a więc że $B(z,r)$ jest rozłączna z $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_{m-1}$, ale $\overline{B}(z,r) \cap \overline{B}_m \neq \emptyset$.

$\overline{B}(z,r) \in \mathcal{B}_{m-1} \Rightarrow \operatorname{diam} \overline{B}(z,r) \leq d_{m-1}$; $\underbrace{\operatorname{diam} \overline{B}_m}_{=2r_m} > \frac{1}{2} d_{m-1}$.

Niech teraz $w \in \overline{B}(z,r) \cap \underbrace{\overline{B}_m}_{=\overline{B}(x_m, r_m)}$, $y \in \overline{B}(z,r)$.

$$\|y - x_m\| \leq \|y - w\| + \|w - x_m\| \leq \operatorname{diam} \overline{B}(z,r) + r_m \leq d_{m-1} + r_m < 5r_m$$

Stąd $y \in \overline{B}(x_m, 5r_m)$, więc $\overline{B}(z,r) \subset \overline{B}(x_m, 5r_m)$.

(a więc dla każdego $z \in Y_k$ istnieje $m > k$ takie, że $z \in \overline{B}(x_m, 5r_m)$)

$\Rightarrow Y_k \subset \bigcup_{m>k} \overline{B}(x_m, 5r_m)$, więc $\lambda_n(Y_k) \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \lambda_n(\overline{B}(x_m, 5r_m)) =$

$$= 5^n \sum_{m=k+1}^{\infty} \lambda_n(\overline{B}_m) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

co znów wynika ze zbieżności szeregu $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n(\overline{B}_m)$

Stąd $\bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k = \operatorname{int} P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$ ma miarę zero;

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k = \underbrace{\Big(\partial P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k\Big)}_{\text{miary zero, bo } \partial P \text{ jest miary zero.}} \cup \Big(\operatorname{int} P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k\Big)$$ też jest miary zero.

brzeg $P = P \setminus \operatorname{int} P$

$\square$.