Ważne wnioski

Wniosek 1 Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem różniczkowalnym klasy C^1. Wtedy F przekształca zbiory mierzalne w zbiory mierzalne i zbiory miary zero w zbiory miary zero.

Dowód: Niech $\Omega_n = \{x \in \Omega : \|x\| \leq n, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$.

Zbiory Ω_n są domknięte i ograniczone, są więc zwarte.

(funkcja $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1, jest więc ciągła)

Niech $E \subset \Omega$ będzie zbiorem mierzalnym.

$\|DF\|$ jest na Ω_n ograniczone, więc $F|_{\Omega_n}$ spełnia warunek Lipschitza, w szczególności z twierdzenia wynika, że gdy oznaczymy $E_n = E \cap \Omega_n$, to $F(E_n) = F|_{\Omega_n}(E_n)$ jest zbiorem mierzalnym (a gdy E_n jest miary zero, to również $F(E_n)$ jest miary zero). Stąd $F(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(E_n)$ też jest mierzalny.

Gdy E jest miary zero, to $\forall_n$ E_n jest miary zero, więc $\forall_n$ $F(E_n)$ jest miary zero

i $F(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(E_i)$ jest miary zero. $\square$

Wniosek 2 Jeżeli $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1, to zarówno obrazy, jak i przeciwobrazy zbiorów mierzalnych w przekształceniu Φ są mierzalne; Φ przekształca też zbiory miary zero w zbiory miary zero.

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$)

Dowód: od razu z poprzedniego wniosku.

Wątpliwość p. Kamila Brauna:

Udowodniliśmy, że dla dowolnego mierzalnego $E \subset \Omega$ i $f = \chi_{\Phi(E)}$ zachodzi nierówność

$$\int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n \overset{(*)}{\geqslant} \int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda_n .$$

Chcemy stąd wywnioskować, że $(*)$ zachodzi dla wszystkich nieujemnych funkcji prostych na $\Phi(\Omega)$.

Wynika to z liniowości całki ORAZ faktu, że każdy mierzalny podzbiór $\Phi(\Omega)$ jest postaci $\Phi(E)$, gdzie E jest mierzalnym podzbiorem Ω (Wniosek 2). Stąd już natychmiast, z tw. o zbieżności monotonicznej, dostajemy, że $(*)$ zachodzi dla wszystkich nieujemnych funkcji mierzalnych na $\Phi(\Omega)$.