Twierdzenie Fubiniego

Niech $f : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna i nieujemna (ew. całkowalna).

Wówczas

a) dla λ_n- p.w. $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $f_x(y) = f(x,y)$ jest mierzalna ~~Ew.~~ względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$

b) dla λ_m- p.w. $y \in \mathbb{R}^m$ funkcja $f^y(x) = f(x,y)$ jest mierzalna względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

c) funkcje

$$\mathbb{R}^n \ni x \xmapsto{F} \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(y)$$

$$\mathbb{R}^m \ni y \xmapsto{G} \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_n(x)$$

są mierzalne odp. względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$

d) Zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, d\lambda_{n+m}((x,y)) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(y)\right) d\lambda_n(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d\lambda_n(x)\right) d\lambda_m(y)$$

Lemat Niech $f_j : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych i załóżmy, że zachodzi jedna z dwóch możliwości:

1) $f_j \nearrow f$

2) $f_j \searrow f$ i f_1 jest całkowalna.

Jeżeli dla każdego j dla funkcji f_j spełniona jest teza tw. Fubiniego, to dla f również jest spełniona.

Dowód

Sprawdźmy po kolei podpunkty tezy tw. Fubiniego dla funkcji f:

a) i b): $f_x = \lim_{j\to\infty} (f_j)_x$, $f^y = \lim_{j\to\infty} (f_j)^y$,

więc zarówno f_x, jak i f^y są mierzalne.

c): $F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{j\to\infty} f_j(x,y)\, d\lambda_m(y) =$

$\overset{\boxtimes}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(x,y)\, d\lambda_m(y) = \lim_{j\to\infty} F_j(x)$, gdzie

$F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_j(x,y)\, d\lambda_m(y)$. Stąd F jest mierzalna

$\boxtimes$ jest, w przypadku 1), konsekwencją tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, a w 2) - tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Mierzalność G dowodzimy tak samo.

d) $$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \lim f_j \, d\lambda_{n+m} \overset{\otimes}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_j \, d\lambda_{n+m} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} f_j(x,y) \, d\lambda_m(y) \right)}_{F_j(x)} d\lambda_n(x) \overset{\lozenge}{=}$$

$$\overset{\lozenge}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\lim_{j\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} f_j(x,y) \, d\lambda_m(y)}_{F_j(x)} \Big) d\lambda_n(x) \overset{\oplus}{=}$$

$$\overset{\oplus}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \lim_{j\to\infty} f_j(x,y) \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x)$$

$\otimes$ jest, jak poprzednio, konsekwencją tw. Lebesgue'a o zbieżności monot. (przypadek 1)) lub zmajoryzowanej (2))

Podobnie $\lozenge$ i $\oplus$, trzeba tylko zauważyć (z monotoniczności całki, że w przypadku 1) $F_j \nearrow F$, w przypadku 2) $F_j \searrow F$, a z założenia funkcja F_1 jest całkowalna.

Drugą połowę punktu c) dowodzimy tak samo, zamieniając tylko n z m, x z y, F z G.

$\square$.

Dowód tw. Fubiniego

Krok 1 Teza twierdzenia zachodzi dla $f = \chi_P$, gdzie P jest przedziałem w $\mathbb{R}^{n+m}$.

Sprawdzamy: a) i b) $P = I \times J$, gdzie I jest przedziałem w $\mathbb{R}^n$, J przedziałem w $\mathbb{R}^m$,

$$f(x,y) = \chi_I(x)\,\chi_J(y)$$

Stąd $f_x(y) = \begin{cases} \chi_J(y) & \text{gdy } x \in I \\ 0 & \text{gdy } x \notin I \end{cases}$, więc dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ jest mierzalna.

Tak samo $f^y(x) = \begin{cases} \chi_I(x) & y \in J \\ \cancel{\chi_I}\ 0 & y \notin J. \end{cases}$

c)

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_I(x)\chi_J(y)\,d\lambda_m(y) =$$

$$= \chi_I(x) \int_{\mathbb{R}^m} \chi_J(y)\,d\lambda_m(y) = \lambda_m(J)\,\chi_I(x) .$$

Analogicznie $G(y) = \lambda_n(I)\,\chi_J(y)$, więc obie funkcje są mierzalne.

Na koniec d)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\lambda_{n+m}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x)$$

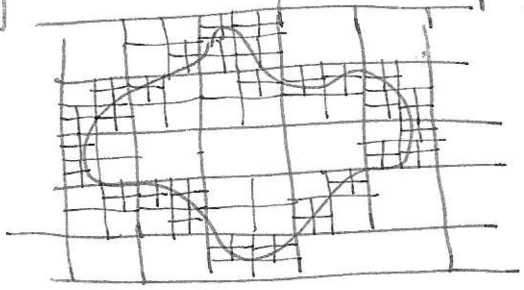
$$\lambda_{n+m}(P) \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(J)\,\chi_I(x)\,d\lambda_n(x) = \lambda_m(J)\,\lambda_n(I)$$

Ta równość (objętości przedziałów) jest, jak wiemy, prawdziwa.

Drugą z równości z c) dokładnie tak samo.

Krok 2 $\quad f = \chi_\Omega$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest zbiorem otwartym.

Wiemy, że Ω jest sumą przeliczalnie wielu przedziałów, których wnętrza są parami rozłączne:



Przydzielając wspólne kawałki brzegów do jednego z przedziałów dostajemy $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, gdzie P_j są parami rozłącznymi przedziałami otwarto-domkniętymi.

Stąd $\quad f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{P_j} = \lim_{j\to\infty} f_j$, gdzie $f_j = \sum_{i=1}^{j} \chi_{P_i}$.

Ciąg f_j jest niemalejący, funkcje f_j są mierzalne, z Kroku 1 i liniowości całki dla funkcji f_j zachodzi teza tw. Fubiniego. Stąd, na mocy Lematu, teza zachodzi również dla f.

Krok 3 $\quad f = \chi_A$, gdzie A jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^{n+m}$ typu G_δ.

Wtedy $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots$ jest zstępującym ciągiem zbiorów otwartych i ograniczonych. (dlaczego? zagadka)

więc $f = \lim_{j\to\infty} f_j$, gdzie $f_j = \chi_{\Omega_j}$. Co więcej, ciąg f_j jest nierosnący (bo (Ω_j) jest ciągiem zstępującym) i $f_1 = \chi_{\Omega_1}$ jest całkowalna (bo Ω_1 jest ograniczony).

Na mocy Lematu (tym razem przypadku 2))
f spełnia tezę tw. Fubiniego

Krok 4 Niech $f = \chi_Z$, gdzie $Z \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest miary zero i ograniczony.
Znajdziemy wtedy $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ typu G_δ, że $Z \subset A$ i A jest ograniczony miary zero.
Dla $g = \chi_A$ spełniona jest teza tw. Fubiniego, w szczególności
$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} g \, d\lambda_m\right)}_{\substack{\text{to jest nieujemna} \\ \text{funkcja zmiennej } x, \\ \text{oznaczmy ją } F_A}} d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} g \, d\lambda_{n+m} = \lambda_{n+m}(A) = 0.$$

$\int_{\mathbb{R}^n} F_A(x) \, d\lambda_n(x) = 0$, F_A nieujemna $\Rightarrow$ dla $\overset{(\lambda_n)}{\text{p.w.}}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $F_A(x) = 0$.

Istnieje zatem $X \subset \mathbb{R}^n$ że $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$, $\forall_{x \in X}$ $F_A(x) = 0$.

Jeżeli jednak $F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, d\lambda_m(y)$,

to $\forall_{x \in \mathbb{R}^n}$ $0 \leq F(x) \leq F_A(x)$, więc $\forall_{x \in X}$ $F(x) = 0$, w szczególności $F = 0$ prawie wszędzie $\Rightarrow$ F jest mierzalna
(to załatwia połowę punktu c), mierzalność G dowodzi się tak samo).

Skoro $\forall_{x \in X}$ $F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) \, d\lambda_m(y) = 0$,

to istnieje (dla ustalonego $x \in X$) zbiór $Y_x \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(\mathbb{R}^m \setminus Y_x) = 0$
taki, że $f_x(y) = 0$ dla $y \in Y_x$. $\Rightarrow$ $f_x = 0$ prawie wszędzie
$\Rightarrow$ f_x jest mierzalna
(dla $x \in X$, więc dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$).

Mierzalność f^y dla p.w. $y \in \mathbb{R}^m$ tak samo.

Na koniec $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, d\lambda_{n+m}(x,y) = \lambda_{n+m}(Z) = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x) =$$

$$= \int_X \left(\int_{Y_x} f(x,y)\, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x) = \int_X \left(\int_{Y_x} 0\, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x) = 0.$$

i analogicznie druga z równości w d).

Krok 5 $f = \chi_A$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest mierzalny i ograniczony

wtedy istnieją $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ typu G_δ i $Z \subset \mathbb{R}^{n+m}$ miary zero, oba ograniczone, $A \cap Z = \emptyset$, $A \cup Z = \tilde{A}$.

Stąd $f = \chi_{\tilde{A}} - \chi_Z$ i z liniowości całki teza zachodzi również dla f.

Krok 6 f jest mierzalna, nieujemna.

Wtedy istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych f_j, $f_j \nearrow f$. ~~Dla każdej z f_j teza tw. Fubiniego zachodzi na mocy Kroku 5 i liniowości całki, więc ((Lemat, przypadek 1)) teza zachodzi też dla f.~~

Niech $g_j = f_j \cdot \chi_{B(0,j)}$. Wtedy również i g_j są funkcjami prostymi, $g_j \nearrow f$, ale zbiory mierzalne, z których funkcji charakterystycznych zbudowane są funkcje g_j, są ograniczone. Stąd na mocy Kroku 5 i liniowości całki dla każdej z g_j spełnione jest teza tw. Fubiniego

$\underset{\substack{\text{Lemat} \\ \text{przypadek 1)}}}{\Longrightarrow}$ spełniona jest też dla f

$\square$.

Wnioski z tw. Fubiniego

1. Mierzalność przekrojów.

Niech $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ będzie mierzalny. ~~Przez~~ Oznaczmy

$$A_x = \{ y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A \}, \quad A^y = \{ x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in A \}$$

(to przekroje zbioru A — „pionowe" i „poziome").

Oczywiście jeżeli $f(x,y) = \chi_A(x,y)$, to

$$f_x(y) = \chi_{A_x}(y), \quad f^y(x) = \chi_{A^y}(x), \quad \text{więc}$$

~~t~~ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ A_x jest mierzalny

——— " ——— $y \in \mathbb{R}^m$ A^y jest mierzalny.

2. <u>Zasada Cavalieriego</u> (używana już przez Archimedesa)

Jeżeli $A, B \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ mają dla p.w. x równej miary przekroje:

$$\lambda_m(A_x) = \lambda_m(B_x) \text{ dla p.w. } x \quad (\star)$$

to $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$

(bo, jak łatwo wywieść z tw. Fubiniego, dla $f = \chi_A$, jeżeli $\star$ zachodzi dla $\boxtimes$ $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$,

to $\lambda_{n+m}(A) \overset{\boxtimes}{=} \int_X \lambda_m(A_x)\, d\lambda_n(x)$.

$$\| $$

$$\int_X \lambda_m(B_x)\, d\lambda_n(x) = \lambda_{n+m}(B).$$

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598, Mediolan – 1647, Bolonia) jezuata (nie jezuita!), korespondent i przyjaciel Galileusza, wybitny włoski geometra i astronom, profesor uniwersytetu w Bolonii.

3. Zasada Cavalieriego, wersja $\overline{\text{II}}$:

Niech $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna, nieujemna.

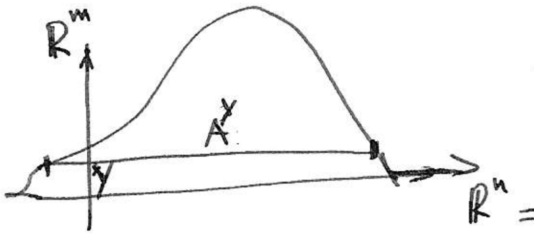
Wówczas $\forall_{p \geq 1}$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p\, d\lambda_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\, dt$$

~~Dla $p=1$ to pierwsza wersja zasady~~ Cavalieriego ~~równości $\boxtimes$ zastosowana do wykresu f~~.

Dla $p=1$ II wersja Zasady Cavalieriego to pierwsza jej wersja + wzór ☒ zastosowane do wykresu f.

(a dokładniej do zbioru ograniczonego wykresem i „osią x")



$$\lambda_n(A^y) = \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > y\}).$$

Dla $p>1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p \, d\lambda_n \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)^p > t\})\, dt \underset{\uparrow}{=}$$

wersja dla $p=1$, z f^p w miejsce f

$t = s^p$
$dt = ps^{p-1}$

$$= \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)^p > s^p\})\, ps^{p-1} ds =$$

$$= p \cdot \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > s\})\, ds$$

$\square$

(w skrypcie Streleckiego ciut inny dowód).

4. Reguła Pappusa - Guldina

<u>Def:</u> Środkiem ciężkości zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^n$ względem miary μ nazywamy punkt $s(A)$ o współrzędnych $(\mu(A) > 0)$

$$s(A)_i = \frac{1}{\mu(A)} \int_A x_i \, d\mu \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Jeżeli wszystkie te całki istnieją, to A ma środek ciężkości, jeżeli któraś nie istnieje, to nie ma.

Niech A będzie mierzalnym podzbiorem półpłaszczyzny $\{(x,y,z) : x > 0, y = 0\}$, mającym środek ciężkości $s(A)$, i niech B będzie podzbiorem $\mathbb{R}^3$ uzyskanym z obrotu A o kąt α wokół prostej $x = y = 0$.

Wtedy $\lambda_3(B) = \alpha r \cdot \lambda_2(A)$, $\Big\}$ α w radianach, rzecz jasna.

gdzie r jest odległością $s(A)$ od osi obrotu:

$$r = \frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x \, d\lambda_2 .$$

Pappus z Aleksandrii (~290 – ~350, Aleksandria) ostatni wielki matematyk grecki, wybitny geometra i astronom.
Habakuk / Paul Guldin (1577 – 1643) urodzony w Sankt Gallen w protestanckiej rodzinie pochodzenia żydowskiego, w wieku 20 lat przeszedł na katolicyzm i został jezuitą. Studiował w Rzymie, uczył w Wiedniu i Gracu. Badał pojęcie środka ciężkości. Przyjaźnił się z Keplerem, ostro krytykował Cavalieriego.

Dowód reguły Pappusa-Guldina

Niech $\Omega = \underset{x}{\overset{\Psi}{(0,\infty)}} \times \underset{z}{\overset{\Psi}{\mathbb{R}}} \times \underset{t}{\overset{\Psi}{(0,\alpha)}} \ni (x,z,t)$

$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x,z,t) = (x\cos t, x\sin t, z)$.

$$|\det D\Phi| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -x\sin t \\ \sin t & 0 & x\cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = |x\sin^2 t + x\cos^2 t| = \underset{x}{\overset{\shortparallel}{|x|}}$$

Łatwo też można sprawdzić, że (o ile $0<\alpha \leq 2\pi$)

Φ jest różnowartościowe $\Rightarrow$ jest więc dyfeomorfizmem.

Mamy też $\Phi(A \times (0,\alpha)) = B \setminus \underbrace{\{\text{półpłaszczyzna } x>0,\ y=0\}}_{\text{zbiór miary zero w } \mathbb{R}^3}$.

Stąd $\lambda_3(B) = \lambda_3(\Phi(A)) =$

$$= \int_{A\times(0,\alpha)} |\det D\Phi| \, d\lambda_3 \underset{\text{tw. Fubiniego}}{=} \int_0^\alpha \left(\int_A x \, d\lambda_2 \right) dt =$$

$$= \int_0^\alpha \left(\lambda_2(A) \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x \, d\lambda_2}_{=r} \right) dt = \int_0^\alpha \lambda_2(A) \cdot r \, dt$$

$$= \alpha \lambda_2(A) \cdot r$$

$\square$.