Całkowanie form różniczkowych

Tak, jak 1-formy całkowaliśmy po (zorientowanych) liniach, tak k-formy całkować będziemy po obiektach k-wymiarowych.

Na początek: całkujemy k-formę po otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^k$

Definicja: Niech $U \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem otwartym i niech $\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k$ będzie k-formą różniczkową na U.

Załóżmy też, że f jest nie tylko gładka, ale i całkowalna na U (ten warunek będzie spełniony np. gdy $f \in C_0^\infty(U)$).

Wówczas przyjmujemy

$$\int_U \omega = \int_U f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k := \int_U f \, d\lambda_k .$$

Cel: Chcemy całkować k-formy po k-wymiarowych rozmaitościach zorientowanych w $\mathbb{R}^n$.

Zacznijmy od takich form, których nośnik zawarty jest w otoczeniu jednej mapy (czyli w obrazie jednej parametryzacji):

<u>Def</u>: Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową, zorientowaną rozmaitością gładką i niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie takim zbiorem otwartym, że istnieje parametryzacja $\Psi : \underset{\underset{\mathbb{R}^k}{\cap \text{ otwarty}}}{V} \xrightarrow{\text{na}} M \cap \mathcal{U}$, zgodna z orientacją M.

Niech $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ma nośnik zwarty, zawarty w $\mathcal{U}$. Wtedy

$$\int_M \omega := \int_V \Psi^* \omega$$

<u>Stwierdzenie</u>: Ta definicja nie zależy od wyboru parametryzacji Ψ.

<u>Dowód</u>: Załóżmy, że nośnik ω jest zawarty w obrazie dwóch różnych parametryzacji, zgodnych z orientacją:

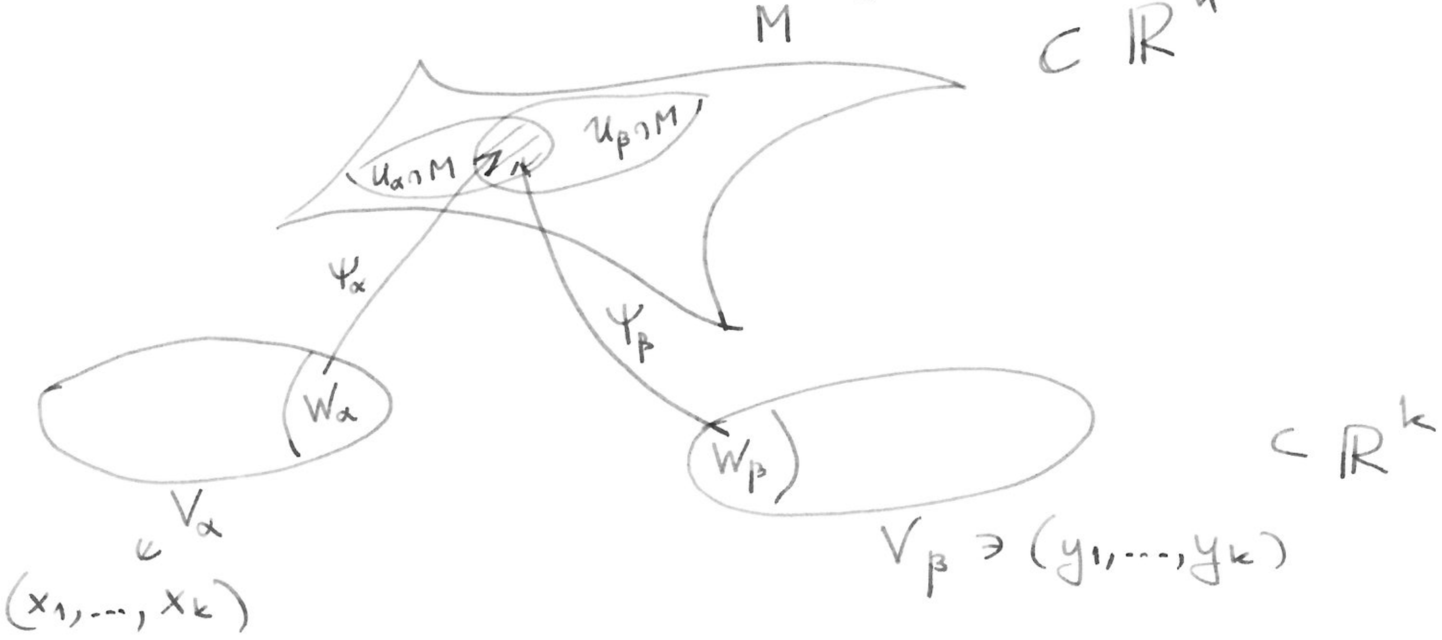
$\operatorname{supp} \omega \subset \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap M$,

$$\Psi_\alpha : V_\alpha \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{U}_\alpha \cap M \qquad \Psi_\beta : V_\beta \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{U}_\beta \cap M$$

to oznaczając odpowiednio $\Phi_\alpha = \Psi_\alpha^{-1} : \mathcal{U}_\alpha \cap M \to V_\alpha$

$\Phi_\beta = \Psi_\beta^{-1} : \mathcal{U}_\beta \cap M \to V_\beta$

$W_\alpha = \Phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap M)$, $W_\beta = \Phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap M)$, Mamy funkcję przejścia $\varphi_{\beta\alpha} : W_\alpha \to W_\beta$ i wiemy, że $\varphi_{\beta\alpha}$ jest dyfeomorfizmem o dodatnim jakobianie (bo parametryzacje Ψ_α i Ψ_β są zgodne z orientacją M, czyli dołączenie $\Phi_\alpha = \Psi_\alpha^{-1}$ i $\Phi_\beta = \Psi_\beta^{-1}$ do atlasu M da znów atlas zorientowany).



mamy $\Psi_\alpha = \Psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$.

Załóżmy teraz, że forma $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ma nośnik zawarty w $U_\alpha \cap U_\beta \cap M$ i niech $\Psi_\beta^* \omega \subset \Omega^k(V_\beta)$ będzie równe $f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$ (to k-forma na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^k$), gdzie $f \in C_0^\infty(W_\beta)$.

Wtedy $\Psi_\alpha^* \omega = (\Psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha})^* \omega =$

$$= \varphi_{\beta\alpha}^* \Psi_\beta^* \omega = \varphi_{\beta\alpha}^* (f\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k)$$

$$= (f \circ \varphi_{\beta\alpha}) \underbrace{d(\varphi_{\beta\alpha})_1 \wedge d(\varphi_{\beta\alpha})_2 \wedge \ldots \wedge d(\varphi_{\beta\alpha})_k}_{= \varphi_{\beta\alpha}^* (dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k)} .$$

$$= (f \circ \varphi_{\beta\alpha}) \underbrace{J_{\varphi_{\beta\alpha}}}_{= \det D\varphi_{\beta\alpha}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

Stąd

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \Psi_\alpha^* \omega = \int_{W_\alpha} (f \circ \varphi_{\beta\alpha}) J_{\varphi_{\beta\alpha}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k =$$

$$= \int_{W_\alpha} (f \circ \varphi_{\beta\alpha}) |J_{\varphi_{\beta\alpha}}| dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int_{W_\alpha} (f \circ \varphi_{\beta\alpha}) J_{\varphi_{\beta\alpha}} d\lambda_k$$

bo $J_{\varphi_{\beta\alpha}} \geqslant 0$ we wszystkich punktach W_α

$$\overset{\text{tw. o zamianie}}{\underset{\text{zmiennych}}{=}} \int_{W_\beta} f\, d\lambda_k = \int_{W_\beta} f\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k = \int_{V_\beta} \Psi_\beta^* \omega .$$

□

No to niech teraz $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ będzie dowolną k-formą gładką na $\mathbb{R}^n$, za to M niech będzie zorientowaną, k-wymiarową, zwartą rozmaitością gładką w $\mathbb{R}^n$.

Skoro M jest zorientowana, to (z definicji) mamy na niej wybrany pewien atlas zorientowany

$$\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \cap M \to V_\alpha \qquad \alpha \in A,$$

A - jakiś zbiór indeksów

gdzie $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ to rodzina zbiorów otwartych pokrywających M. Wiemy jednak, że M jest zwarta $\Rightarrow$ z $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ możemy wybrać podpokrycie $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m\}$ skończone a więc z atlasu $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ możemy wybrać atlas zgodny z nim i złożony ze skończenie wielu map $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m\}$.

Wykazaliśmy tym samym, że zwarta rozmaitość zorientowana ma atlas zorientowany złożony ze skończenie wielu map.

Niech teraz $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ będzie wpisanym w $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ rozkładem jedynki na M:

- dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$ $\zeta_i \in C_0^\infty(\mathcal{U}_i)$ (w szczególności $\zeta_i \equiv 0$ poza $\mathcal{U}_i$)
- $\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_m \equiv 1$ w pewnym otoczeniu M.

Niech teraz $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie takim zbiorem otwartym, że $M \subset W$ i niech $\omega \in \Omega^k(W)$ (wcześniej chcieliśmy, by $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, ale ω nie musi być określona na całym $\mathbb{R}^n$, wystarczy nam na pewnym otoczeniu W rozmaitości M).

Definiujemy
$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\boxed{M \cap \mathcal{U}_i}} \boxed{\zeta_i \cdot \omega}$$

to jest k-forma o nośniku zawartym w $\mathcal{U}_i$.

to jest podrozmaitość k-wymiarowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$, opisana jedną parametryzacją

Prościutki rachunek pokazuje, że ta definicja nie zależy od wyboru atlasu zorientowanego czy rozkładu jedynki.

Aby sformułować twierdzenie Stokesa, musimy najpierw zrozumieć, jak wprowadza się naturalną orientację na brzegu podzbioru rozmaitości zorientowanej.

Niech M będzie gładką, m-wymiarową, zorientowaną podrozmaitością przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech teraz $K \subset M$ będzie takim zwartym podzbiorem M, którego brzeg ∂K jest $(m-1)$-wym. podrozmaitością $\mathbb{R}^n$.

Zadanie: Niech $\phi : \mathcal{U} \cap M \to V \subset \mathbb{R}^m$ będzie taką mapą na M, że $\mathcal{U} \cap \partial K \neq \emptyset$. Wówczas $\phi(\mathcal{U} \cap \partial K)$ jest $(m-1)$-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^m$.

Wskazówka: Niech $\psi = \phi^{-1} : V \to \mathcal{U} \cap M$ i niech $\phi_\alpha : \partial K \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^{m-1}$, $\alpha \in A$, będzie atlasem na $\partial K \cap \mathcal{U}$. Wtedy $(\phi_\alpha \circ \psi)_{\alpha \in A}$ jest atlasem na $\phi(\mathcal{U} \cap \partial K)$.

Niech teraz $p \in M$. Mówimy, że baza $(w_1, \dots, w_m)$ przestrzeni T_pM jest dodatnio zorientowana, gdy jej orientacja jest zgodna z orientacją bazy $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\phi(p)), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_m}(\phi(p))\right)$, gdzie ϕ jest taką mapą ze zorientowanego atlasu M, że p należy do jej dziedziny; $\psi = \phi^{-1}$ jest odpowiadającą jej parametryzacją.

to znaczy, że macierz przejścia między tymi bazami ma dodatni wyznacznik.

Niech teraz $p \in \partial K$. $T_p \partial K$ jest $(m-1)$-wymiarową podprzestrzenią liniową m-wymiarowej przestrzeni T_pM, więc istnieje dokładnie jeden kierunek w T_pM prostopadły do $T_p\partial K$ – a więc dwa wektory jednostkowe w T_pM prostopadłe do $T_p \partial K$, różniące się zwrotem. Jeden wskazuje do wewnątrz K, drugi (ozn. $\nu(p)$) na zewnątrz: dla każdej krzywej gładkiej $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tż. $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \nu(p)$ dla wszystkich dost. małych $t > 0$ mamy $\gamma(t) \notin K$.

Bazę $(v_1, \dots, v_{m-1})$ przestrzeni $T_p \partial K$ nazywamy dodatnio zorientowaną, gdy baza $(\nu(p), v_1, \dots, v_{m-1})$ jest dodatnio zorientowaną bazą $T_p M$; mapa $\phi : \mathcal{U} \cap \partial K \to V \subset \mathbb{R}^{m-1}$ jest zgodna z tą orientacją, gdy dla $\psi = \phi^{-1}$ baza $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_{m-1}}\right)$ jest dodatnio zorientowana w każdym punkcie zbioru V.

Zachodzi twierdzenie, którego - jak poprzednio jego euklidesowego odpowiednika - nie udowodnimy: ta konstrukcja rzeczywiście zadaje orientację ∂K, w szczególności ∂K jest rozmaitością orientowalną. Tę orientację ∂K nazywamy orientacją dziedziczoną z M.

Twierdzenie (Stokesa, wersja współczesna)

Niech M będzie m-wymiarową rozmaitością zorientowaną klasy C^1; niech $K \subset M$ będzie zbiorem zwartym takim, że $\underset{\uparrow}{\partial K}$ jest $(m-1)$-wym.

brzeg liczony w topologii
M jako podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$

podrozmaitością $\mathbb{R}^n$, z orientacją dziedziczoną z M. Niech teraz $W \supset M$ będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Wtedy dla każdej $(m-1)$-formy $\omega \in \Omega^{m-1}(W)$

zachodzi równość

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega .$$

Dowód, za skryptem prof. Streleckiego, zaczniemy od nast. twierdzenia

Twierdzenie Gaussa o dywergencji.

Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym, z brzegiem $\partial \mathcal{U}$ klasy C^1.
Niech $\nu : \partial \mathcal{U} \to \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ zadaje w każdym punkcie $p \in \partial \mathcal{U}$ wektor normalny zewnętrzny $\nu(p)$ ~~do U~~ :

i niech pole wektorowe w klasy C^1 będzie zadane na pewnym otoczeniu W zbioru $\overline{\mathcal{U}}$ (tzn. $\overline{\mathcal{U}} \subset \underset{\text{otw.}}{W} \subset \mathbb{R}^n$, $w \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$). Wówczas

$$\int_G \operatorname{div} w \, d\lambda_n = \underbrace{\int_{\partial G} \langle w, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1}}_{\text{strumień pola } w \text{ przez powierzchnię } \partial G} . \qquad \boxtimes$$

Na ostatnim wykładzie udowodnimy

Twierdzenie Stokesa

Niech M będzie m-wymiarową rozmaitością zorientowaną klasy C^1; $K \subset M$ niech będzie takim zwartym podzbiorem M, że ∂K jest (m-1)-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$, z orientacją dziedziczoną z M.
Na koniec, niech W będzie otoczeniem K, tj otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ takim, że $K \subset W$.
Wtedy dla każdej (m-1) formy różniczkowej $\omega \in \Omega^{m-1}(W)$ zachodzi równość

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega .$$

Dowód, za skryptem prof. Strzeleckiego, zaczniemy od następującego twierdzenia:

Twierdzenie Gaussa o dywergencji

Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ~~klasy~~ ograniczonym z brzegiem klasy C^1 i niech $\nu : \partial\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ zadaje w każdym punkcie $p \in \partial\mathcal{U}$ wektor normalny zewnętrzny:

Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym zawierającym $\overline{\mathcal{U}}$.

~~Załóżmy, że pole wektorowe $w \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$~~

Dla każdego pola wektorowego $w \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ zachodzi równość

$$\int_{\mathcal{U}\cancel{G}} \operatorname{div} w \, d\lambda_n = \underbrace{\int_{\partial \mathcal{U}} \langle w, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1}}_{\substack{\text{tę wielkość nazywamy całkowitym} \\ \text{strumieniem pola } w \text{ przez powierzchnię } \partial G}} \qquad \boxtimes$$

Dowód tw. Gaussa

Krok 1 Uproszczenie: obie strony równości $\boxtimes$ są liniowe względem pola w. To znaczy, że wystarczy ją udowodnić dla pól, które mają tylko jedną współrzędną niezerową; bez straty ogólności możemy przyjąć, że $w = (0, 0, \dots, w_n)$.

Dalsza część dowodu bardzo przypomina dowód tw. Greena:

Krok 2 Pokrywamy $\overline{\mathcal{U}}$ otwartymi przedziałami: dla każdego $p \in \overline{\mathcal{U}}$ znajdujemy przedział $Q(p)$ o środku w p taki, że

- jeżeli $p \in \mathcal{U}$, to $Q(p) \subset \mathcal{U}$ ← da się, bo $\mathcal{U}$ jest otwarty
- jeżeli $p \in \partial \mathcal{U}$, to $Q(p) \cap \partial \mathcal{U}$ jest wykresem: istnieją $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $\varphi \in C^1$ takie, że

$$\partial \mathcal{U} \cap Q(p) = \{ x \in Q(p) : x_i = \varphi(x_1, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bez } x_i}}{\dots}, x_n) \}.$$

Ze zwartości $\overline{\mathcal{U}}$ możemy z $\{Q(p)\}_{p \in \overline{\mathcal{U}}}$ wybrać pokrycie skończone $Q_1, \dots, Q_N$; $Q_1, \dots, Q_K \subset \mathcal{U}$, $Q_{K+1}, \dots, Q_N$ pokrywają $\partial \mathcal{U}$.

W pokrycie $\{Q_1,\dots,Q_N\}$ wpisujemy rozkład jedynki:

$\zeta_1,\dots,\zeta_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\zeta_i \subset Q_i$, $\zeta_1+\dots+\zeta_N \equiv 1$ na pewnym otoczeniu zbioru $\overline{\mathcal{U}}$.

Zauważmy, że na tymże otoczeniu $\overline{\mathcal{U}}$ mamy

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n}+\dots+\frac{\partial \zeta_N}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}1 \equiv 0. \qquad \circledast \; .$$

<u>Krok 3</u> W tym kroku przerabiamy przy pomocy rozkładu jedynki równość $\boxtimes$ tak, by rozłożyć ją na równości całek na poszczególnych przedziałach Q_i, $i=1,2,\dots,N$.

Zauważmy, że $\operatorname{div} w = \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$. Stąd

$$\int_{\mathcal{U}} \operatorname{div} w \, d\lambda_n = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial w_n}{\partial x_n} d\lambda_n = \int_{\mathcal{U}} \Big(\sum_{i=1}^{N} \zeta_i\Big) \frac{\partial w_n}{\partial x_n} d\lambda_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\underset{\nearrow}{Q_i\cap\mathcal{U}}} \zeta_i \frac{\partial w_n}{\partial x_n} d\lambda_n = \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i\cap\mathcal{U}} \Big(\frac{\partial(\zeta_i w_n)}{\partial x_n} - w_n \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_n}\Big) d\lambda_n$$

bo $\operatorname{supp}\zeta_i \subset Q_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i\cap\mathcal{U}} \frac{\partial \zeta_i w_n}{\partial x_n} d\lambda_n - \int_{\underset{\uparrow}{\mathcal{U}}} \overset{\circledast}{\overbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_n}\Big)}^{=0}} \cdot w_n \, d\lambda_n$$

$\operatorname{supp} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_n} \subset Q_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i\cap\mathcal{U}} \frac{\partial(\zeta_i w_n)}{\partial x_n} d\lambda_n .$$

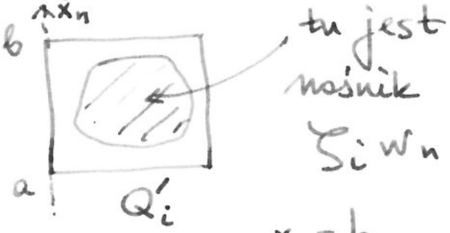
Krok 4 Przyjrzyjmy się oddzielnie każdej z całek

$$\int_{Q_i \cap \mathcal{U}} \frac{\partial(\zeta_i w_n)}{\partial x_n}\, d\lambda_n \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Dla $i = 1, 2, \dots, k$ mamy $Q_i \subset \mathcal{U}$, więc $Q_i \cap \mathcal{U} = Q_i$;

$Q_i = Q_i' \times (a, b)$

↑ przedział w $\mathbb{R}^{n-1}$



$$\int_{Q_i \cap \mathcal{U}} \frac{\partial(\zeta_i w_n)}{\partial x_n}\, d\lambda_n = \int_{Q_i'} \zeta_i w_n \Big|_{x_n = a}^{x_n = b} d\lambda_{n-1} = 0$$

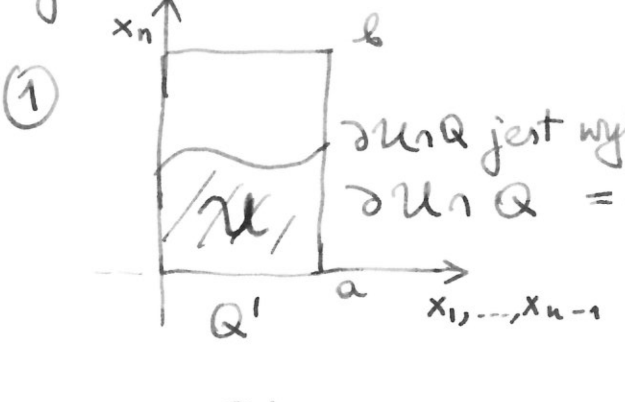
Pozostają te ~~kos~~ przedziały Q_i, które przecinają $\partial \mathcal{U}$, czyli $Q_{k+1}, \dots, Q_N$.

Dla uproszczenia oznaczmy Q_i przez Q;

$u = \zeta_i w_n$; $\operatorname{supp} u \subset Q$.

Jak w dowodzie tw. Greena, mamy 2 przypadki

①



$\partial \mathcal{U} \cap Q$ jest wykresem φ;

$\partial \mathcal{U} \cap Q = \{(x', \varphi(x')) : x' \in Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$

$\mathcal{U} \cap Q = \{(x', x_n) : a < x_n < \varphi(x') < b : x' \in Q'\}$.

Z tw. Fubiniego

$$\int_{Q \cap \mathcal{U}} \frac{\partial u}{\partial x_n}\, d\lambda_n = \int_{Q'} \int_a^{\varphi(x')} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') =$$

$$= \cancel{\int_{Q'} \int_a^{\varphi(x')} \frac{\partial u}{\partial x_n}} = \int_{Q'} u(x', x_n) \Big|_{x_n = a}^{x_n = \varphi(x')} d\lambda_{n-1}(x') =$$

$$= \int_{Q'} u(x', \varphi(x'))\, d\lambda_{n-1}(x') = \boxed{*}$$

$\uparrow$

bo $u(x',a) = 0$ dla wszystkich $x' \in Q'$

Chcemy jeszcze wyrazić $\boxed{*}$ przez całkę po $\partial\mathcal{U} \cap Q$ względem miary powierzchniowej $d\sigma_{n-1}$.

Łatwo możemy sprawdzić, biorąc standardową parametryzację wykresu φ: $x' \xmapsto{\Psi} (x', \varphi(x'))$, że miara $d\sigma_{n-1}(x', \varphi(x')) = \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}\, d\lambda_{n-1}(x')$.

Równocześnie wektor $\nu(x', \varphi(x'))$ jednostkowy, i prostopadły do wykresu φ w $(x', \varphi(x'))$ i wskazujący na zewnątrz $\mathcal{U}$ („do góry"), to $\nu(x', \varphi(x')) = \frac{N(x')}{\|N(x')\|}$, gdzie $N(x') = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x'), \dots, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(x'), 1\right)$

(proszę to sprawdzić!) i $\|N(x')\| = \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}$.

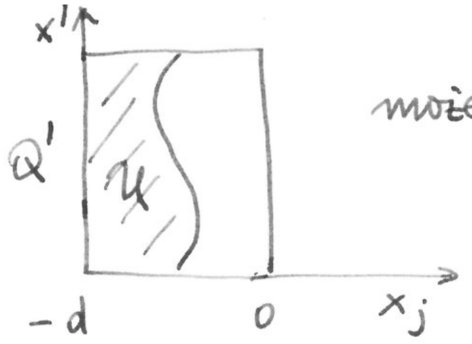
Mamy zatem

$$\int_{Q'} u(x', \varphi(x'))\, d\lambda_{n-1}(x') = \int_{Q'} \zeta_i(x', \varphi(x'))\, w_n(x', \varphi(x'))\, d\lambda_{n-1}(x')$$

$$= \int_{Q'} \langle \zeta_i w, N \rangle \frac{\|N\|}{\|N\|} \cdot d\lambda_{n-1}(x') = \int_{Q \cap \partial\mathcal{U}} \zeta_i \langle w, \nu \rangle\, d\sigma_{n-1}$$

Stąd $$\int_{Q_i \cap \mathcal{U}} \frac{\partial(\zeta_i w_n)}{\partial x_n}\, d\lambda_n = \int_{Q_i \cap \partial\mathcal{U}} \zeta_i \langle w, \nu \rangle\, d\sigma_{n-1} ,$$

Przypadek ② :



bez straty ogólności możemy przyjąć, że $j = 1$, więc:

$$\mathcal{U} \cap Q = \{(x_1, x') : x' \in Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}, \; -d < x_1 < \varphi(x') < 0\}$$

$$\partial\mathcal{U} \cap Q = \{(\varphi(x'), x') : x' \in Q'\}.$$

Nośnik funkcji $u = \zeta_i w_n$ jest zawarty w Q, możemy więc u gładko przedłużyć na $x_1 \leq d$, kładąc $u(x_1, x') = 0$ gdy $x_1 \leq d$, $x' \in Q'$.

$$\int_{Q \cap \mathcal{U}} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, d\lambda_n = \int_{Q'} \int_{-\infty}^{\varphi(x')} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, x') \, dx_1 \, d\lambda_{n-1}(x')$$

$$\underset{x_1 = t + \varphi(x')}{=} \int_{Q'} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(x), x') \, dt \, d\lambda_{n-1}(x') = \ast$$

zamiana zmiennych tylko w wewnętrznej całce

Oznaczmy $v(t, x') = u(t + \varphi(x'), x')$.

Zauważmy, że dla $x' \in \partial Q'$ mamy $v(t, x') = u(t + \varphi(x'), x') = 0$, bo wtedy $(t + \varphi(x'), x') \in \partial Q$, a $\operatorname{supp} u \subset Q$. Stąd, biorąc $Q' = Q'' \times \underset{\overset{\cup}{x_n}}{(\alpha, \beta)}$, mamy

$$\ast = \int_{-\infty}^{0} \int_{Q'} \frac{\partial v}{\partial x_n}(t, x') \, dx' \, dt = \int_{-\infty}^{0} \int_{Q''} \underbrace{v(t, x') \Big|_{x_n = \alpha}^{x_n = \beta}}_{=0} d\lambda_{n-2}(x'') \, dt$$

$\otimes$

$$= 0$$

Z drugiej strony

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(t,x') = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(u\left(t+\varphi(x'),x'\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(t+\varphi(x'),x'\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x') + \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(t+\varphi(x'),x'\right),$$

więc $\displaystyle ☆ = \int_{Q'}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(t+\varphi(x'),x'\right)dt\,dx' =$

$$= \underbrace{\int_{Q'}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial v}{\partial x_n}(t,x')\,dt\,\overset{\text{porządniej: } d\lambda_{n-1}(x')}{\widetilde{dx'}}}_{=0\text{, z } \otimes + \text{ Fubini}} - \int_{Q'}\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(t+\varphi(x'),x'\right)}_{=\frac{d}{dt}\left(u\left(t+\varphi(x'),x'\right)\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x')\;dt\,d\lambda$$

$$= -\int_{Q'}u\left(\varphi(x'),x'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x')\,d\lambda_{n-1}(x')$$

i tak samo jak poprzednio sprawdzamy, że

$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ to n-ta współrzędna wektora $N(x') = (1,-\nabla\varphi(x'))$, prostopadłego do $\partial\mathcal{U}$ i wskazującego na zewnątrz $\mathcal{U}$;

$$\nu\left(\varphi(x'),x'\right) = \frac{N(x')}{\|N(x')\|}, \quad d\sigma_{n-1}\left(\varphi(x'),x'\right) = \|N(x')\|\,d\lambda_{n-1}(x').$$

Stąd

$$-\int_{Q'}u\left(\varphi(x'),x'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x')\,d\lambda_{n-1}(x') = \int_{Q'}\overset{\text{wszystko w } (\varphi(x'),x')}{\widetilde{\zeta_i w_n\cdot\nu_n}}\cdot\|N(x')\|\,d\lambda_{n-1}(x') =$$

$$= \int \zeta_i\langle w,\nu\rangle\,d\sigma_{n-1}.$$

Sumując ten rachunek po wszystkich $i = k+1, \dots, N$ dostajemy teraz tw. Gaussa.

$\square$

Przejdźmy teraz do dowodu tw. Stokesa.

Najpierw udowodnimy je w sytuacji, gdy $M = \mathbb{R}^n$; $\operatorname{int} K \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem ograniczonym. Wówczas $W \supset K$ jest zbiorem otwartym i $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$. Wiemy, że taką $(n-1)$-formę w $\mathbb{R}^n$ można zapisać jako

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_i(x)\, dx_1 \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bez } dx_i}}{\dots} \wedge dx_n \quad ;$$

wtedy $$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div} v \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

i $$\int_K d\omega = \int_K \operatorname{div} v \, d\lambda_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tw. Gaussa}}}{=} \int_{\partial K} \langle v, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1} .$$

Pozostaje wykazać, że $\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} \langle v, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1}$.

To tylko techniczny problem: musimy wyznaczyć współrzędne wektora normalnego zewnętrznego ν do ∂K i związek miary powierzchniowej z całką z $(n-1)$-formy ω. I jedno, i drugie mamy zdefiniowane przez lokalną parametryzację ∂K.

Niech zatem $\Psi : V \to \mathcal{U} \cap \partial K$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ otwarte będzie lokalną parametryzacją ∂K, zgodną z orientacją.

Współrzędne w V oznaczać będziemy przez $y_1, \dots, y_{n-1}$, $\Psi(y) = p \in \partial K$. Wtedy wektory $\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}}(y)$ ~~rozpinają~~ są dodatnio zorientowaną bazą przestrzeni $T_p \partial K$.

Aby znaleźć $\nu(p)$, musimy wyznaczyć wektor jednostkowy, prostopadły do $\frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y)$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ i taki, by baza $\left(\nu(p), \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}}(y)\right)$ była dodatnio-zorientowaną bazą $\mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że ten ostatni warunek to po prostu warunek

$$\det \underbrace{\left(\nu(p), \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}(y)\right)}_{\substack{\text{bo to jest macierz przejścia} \\ \text{od } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ do naszej bazy.}}} > 0$$

Oznaczmy przez $D\Psi_{I_j}(y)$ macierz powstałą z $D\Psi(y)$ przez wykreślenie wiersza ~~odpowiao~~ zawierającego pochodne Ψ_j. $(\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_j, \dots, \Psi_n))$ i przyjmijmy $\xi_j = (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}$. Wtedy, z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny, dla dowolnego $\zeta \in \mathbb{R}^n$

$$\det\left(\zeta, \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}}(y)\right) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j} = \langle \zeta, \xi \rangle.$$

Wiemy też, że jeżeli $\zeta \in \operatorname{span}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_{n-1}}(y)\right)$

$= T_p \partial K$, to

kolumny macierzy $\left(\zeta, \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_{n-1}}(y)\right)$ są liniowo zależne i jej wyznacznik jest 0.

Stąd $\forall \zeta \in T_p \partial K \quad \langle \zeta, \xi \rangle = 0 \Rightarrow \xi \perp T_p \partial K$.

Co więcej, $\det\left(\xi, \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_{n-1}}(y)\right) = \langle \xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 > 0$,

więc baza $\left(\xi, \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_{n-1}}(y)\right)$ jest dodatnio zorientowana.

{ Uwaga: pod warunkiem, że $\xi \neq 0$; proszę się zastanowić, dlaczego tak jest.

Stąd $\nu(p) = \frac{\xi}{\|\xi\|}$. A ile wynosi $\|\xi\|$?

$$\|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\det D\Psi_{I_j}(y)\right)^2 \underset{\uparrow}{=} \det\left(D\Psi^T(y)\, D\Psi(y)\right)$$

wzór Cauchy'ego - - Bineta

Ostatecznie
$$\nu(p) = \frac{(-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}(y)}{\sqrt{\det D\Psi^T_{(y)} \cdot D\Psi(y)}}$$

Stąd
$$\int_{\partial K \cap U} \langle v, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1} = \int_{\Phi(V)} \langle v, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1}$$

$$= \int_V \langle v(\Psi(y)), \nu(\Psi(y)) \rangle \sqrt{\det D\Psi^T(y)\, D\Psi(y)} \, d\lambda_{n-1}(y)$$

$$= \int_V \sum_{j=1}^{n} v_j(\Psi(y) \cdot (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}(y) \, d\lambda_{n-1}(y) =$$

$$= \int_V \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \circ \Psi \cdot \Psi^*(dx_1 \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bez } dx_j}}{\ldots} \wedge dx_n) =$$

$$= \int_V \Psi^* \omega = \int_{\partial K \cap \mathcal{U}} \omega .$$

W szczególności, gdy ω ma nośnik zawarty w $\mathcal{U}$, mamy $\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega$.

Aby udowodnić twierdzenie dla dowolnej formy ω, wprowadzamy ~~skończony atlas $\{\Phi_i\}$ $i=1,2,\ldots$~~ skończone pokrycie $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N$ zbioru K takie, że $\partial K \cap \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, są dziedzinami map; wpisujemy w $\{\mathcal{U}_i\}$ rozkład jedynki $\{\zeta_i\}$; wtedy dla każdego $i \in 1, 2, \ldots, N$

$$\int_{\partial K} \zeta_i \omega = \int_K d(\zeta_i \omega) = \int_K d\zeta_i \wedge \omega + \int_K \zeta_i d\omega$$

i sumujemy po wszystkich i, korzystając z faktu, że $\sum_i \zeta_i \equiv 1$ w otoczeniu K, więc $d \sum_i \zeta_i = \sum_i d\zeta_i \underset{\text{na } K.}{\equiv 0}$.

Co w ogólnej sytuacji, gdy $M \subset \mathbb{R}^n$ jest m-wymiarow $m < n$?

Znów wybieramy skończone pokrycie $\{U_1, \dots, U_N\}$ zbioru $K \subset M$, takie, że dla każdego $i \in \{1, \dots, N\}$ zbiór $U_i \cap M$ jest dziedziną mapy ϕ_i.

W pokrycie $\{U_i\}$ wpisujemy rozkład jedynki $\{\zeta_i\}$: $\operatorname{supp} \zeta_i \subset U_i$, $\sum_{i=1}^{N} \zeta_i \equiv 1$ na otoczeniu K.

Oznaczmy: $\psi_i : V_i \longrightarrow U_i \cap M$, $\psi_i = \phi_i^{-1}$

$$\omega_i = \psi_i^*(\zeta_i \omega) \in \Omega^{m-1}(V_i).$$

Łatwo można sprawdzić, korzystając z tego, że ϕ_i jest homeomorfizmem, że $\phi_i(\partial K \cap U_i) = \partial \phi_i(K \cap U_i)$

Mamy zatem

$$\int_{\partial K \cap U_i} \zeta_i \omega = \int_{\psi_i^{-1}(\partial K \cap U_i)} \psi_i^*(\zeta_i \omega) = \int_{\phi_i(\partial K \cap U_i)} \omega_i = \int_{\partial \phi_i(K \cap U_i)} \omega_i \overset{\text{udowodniona już wersja tw. Stokesa}}{=}$$

$$= \int_{\phi_i(K \cap U_i)} d\omega_i = \int_{\psi_i^{-1}(K \cap U_i)} d\psi_i^*(\zeta_i \omega) = \int_{\psi_i^{-1}(K \cap U_i)} \psi_i^*(d(\zeta_i \omega)) =$$

$$= \int_{K \cap U_i} d\zeta_i \wedge \omega + \int_{K \cap U_i} \zeta_i \, d\omega .$$

Sumując te równości po wszystkich i oraz korzystając z tego, że $\sum_{i=1}^{N} d\zeta_i = d \sum_{i=1}^{N} \zeta_i = d1 \equiv 0$ w otoczeniu K dostajemy tezę tw. Stokesa.

Zastosowanie twierdzenia Stokesa:

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

Luitzen Egbertus Jan Brouwer
1881 - 1966 matematyk holenderski

Piers Bohl
1865 - 1921 matematyk łotewski

(Jules) Henri Poincaré wielki matematyk
1854 - 1912 francuski, o genialnej intuicji, zajmował się również filozofią, astronomią, mechaniką i innymi działami fizyki, jedyny człowiek wybrany do wszystkich pięciu sekcji (geometrii, mechaniki, fizyki, geografii i nawigacji) Akademii Francuskiej 1887 - 1906 jej przewodniczący.

Niech $B \subset \mathbb{R}^n$ będzie kulą domkniętą.

Każde przekształcenie ciągłe $f: B \to B$ ma punkt stały, tzn. istnieje $x \in B$ takie, że $f(x) = x$.

My, korzystając z twierdzenia Stokesa, wykażemy równoważne mu

Twierdzenie o nieistnieniu retrakcji B na ∂B

Nie istnieje przekształcenie ciągłe $g: B \to \partial B = S^{n-1}$ które na ∂B jest identycznością, tzn.
$\forall_{x \in \partial B} \; g(x) = x$.

Dowód równoważności obu twierdzeń:

- Tw. Brouwera ⇒ nieistnienie retrakcji

Dla uproszczenia, bso, niech $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$

Załóżmy, że istnieje retrakcja $r : B \to \partial B$:

$r : B \to \partial B$ ciągłe, $\forall_{x \in \partial B}\ r(x) = x$.

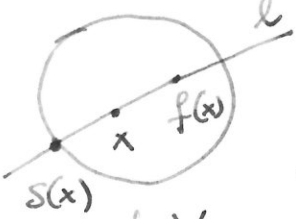
Niech $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $S(x) = -x$.

Wtedy $S \circ r : B \to B$ nie ma punktu stałego.

- nieistnienie retrakcji ⇒ Tw. Brouwera

Załóżmy, że istnieje $f : B \to B$ ciągłe, bez punktu stałego, a więc $\forall_{x \in B}\ f(x) \neq x$.

Zdefiniujmy $S : B \to \partial B$ następująco:



prowadzę prostą l przez x i $f(x)$ i wybieram za $S(x)$ punkt na $\partial B \cap l$ leżący po stronie x. Łatwo można sprawdzić, że S jest ciągłe (można je wypisać wzorem) i dla $x \in \partial B$ $S(x) = x$.

Dowód twierdzenia o nieistnieniu retrakcji

Krok 1 Wygładzanie

Załóżmy, że istnieje retrakcja $r : B \to \partial B$ (ciągła, $r|_{\partial B} = id$). Wykażemy, że istnieje wtedy $R : \mathbb{R}^n \to S^{n-1} = \partial B$ gładkie i takie, że dla $x \in \partial B$ $R(x) = x$ (tj $R|_{\partial B} = id$).

- przedłużamy $r : B \to \partial B$ do $\tilde{r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kładąc $r(x) = x$ dla $x \notin B$

- niech $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ będzie jedynką aproksymatywną, powstałą z funkcji φ zależnej tylko od $\|x\|$ (tj $\varphi(x) = h(\|x\|)$ dla pewnej funkcji h).

Wiemy, że na kuli $B(0,2)$ mamy $r_\varepsilon = \tilde{r} * \varphi_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} \tilde{r}$, więc ~~istnieje $\varepsilon>0$ t~~ dla dostatecznie małych $\varepsilon>0$ $\sup\limits_{x\in B(0,2)} \|r_\varepsilon(x) - \tilde{r}(x)\| < \frac{1}{2}$.

Wtedy, dla $x\in B(0,3/2)$

$$\|r_\varepsilon(x)\| = \|\tilde{r}(x) + r_\varepsilon(x) - \tilde{r}(x)\| \overset{n.\Delta}{\geq} \underset{\substack{\vee \\ 1}}{\|\tilde{r}(x)\|} - \underbrace{\|r_\varepsilon(x)-\tilde{r}(x)\|}_{\substack{\wedge \\ 1/2}} > 0,$$

więc $r_\varepsilon(x)\neq 0$.

Podobnie, dla dost. małych $\varepsilon>0$ funkcja φ_ε ma nośnik w $B(0,1/2)$, więc dla $x\notin B(0,3/2)$

$$r_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{r}(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{B(0,1/2)} \tilde{r}(x-y)\varphi_\varepsilon(y) =$$

jeżeli $x\notin B(0,3/2), y\in B(0,1/2)$, to $x-y\notin B(0,1)=\underline{B}$ i $\tilde{r}(x-y)=x-y$

$$= \int_{\substack{B(0,1/2) \\ \text{~~albo~~ lub} \\ \mathbb{R}^n}} (x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = x\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(y)\,dy}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} y\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy} = x\neq 0.$$

funkcja podcałkowa jest nieparzysta we wszystkich współrzędnych y_i, więc ta całka jest 0

Niech zatem $\varepsilon>0$ będzie dostatecznie małe, by $r_\varepsilon(x)\neq 0$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}^n$ i by $r_\varepsilon(x)=x$ dla x poza $B(0,3/2)$. Wtedy

$$R(x) = \frac{r_\varepsilon(2x)}{\|r_\varepsilon(2x)\|}$$

spełnia nasze wymagania: jest gładkie, ~~R_ε~~ dla $x\in\partial B$ $\dfrac{r_\varepsilon(2x)}{\|r_\varepsilon(2x)\|} = \dfrac{2x}{\|2x\|} = x$.

No to zastosowanie tw. Stokesa: <u>krok 2</u>

$$\underset{\underset{\omega_n}{\shortparallel}}{\lambda_n(B)} = \int_B dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n = \int_B d(x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} x_1 dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n \overset{(*)}{=} \int_{S^{n-1}} R_1 dR_2\wedge\ldots\wedge dR_n =$$

tw. Stokesa

$$= \int_B dR_1\wedge\ldots\wedge dR_n = \int_B \underbrace{\det DR}_{\overset{\shortparallel\,\boxtimes}{0}} d\lambda_n = 0 \quad \lightning$$

Wyjaśnijmy kroki $\boxtimes$ i $(*)$:

$\boxtimes$: kolumny $DR(x)$ to wektory styczne do S^{n-1} w $R(x)$. Przestrzeń $T_{R(x)}S^{n-1}$ jest $(n-1)$-wymiarowa, więc kolumny $DR(x)$ <u>nie mogą</u> być liniowo niezależne - jest ich za dużo (tj. n).

$(*)$ całkujemy po sferze, na której $x_i = R_i$, więc oczywiście mogę podstawić R_1 w miejsce x_1. Ale czy $dx_i = dR_i$ dla $i = 2, 3, \ldots, n$?

Niech $\Psi: \underset{\underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\cap}}{V} \longrightarrow S^{n-1}\cap U$ będzie lokalną parametryzacją S^{n-1}. Skoro dla $x\in V$ $\Psi(x)\in S^{n-1}$, to $x_i\circ\Psi = \Psi_i = R_i\circ\Psi$.

Mamy więc

$$\int_{S^{n-1}\cap U} x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n = \int_V \Psi^*(x_1 dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n) =$$

$$= \int_V \Psi^* x_1 \cdot \Psi^* dx_2\wedge\Psi^* dx_3\wedge\ldots\wedge\Psi^* dx_n =$$

$$= \int_V x_1\circ\Psi \cdot d(x_2\circ\Psi)\wedge d(x_3\circ\Psi)\wedge\ldots\wedge d(x_n\circ\Psi) =$$

$$= \int_V \Psi_1 d\Psi_2\wedge\ldots\wedge d\Psi_n$$

ale w dokładnie ten sam sposób możemy wykazać, podstawiając w powyższym rachunku R_i w miejsce x_i, że

$$\int_{S^{n-1}\cap U} R_1 dR_2\wedge\ldots\wedge dR_n = \int_V \Psi_1 d\Psi_2\wedge\ldots\wedge d\Psi_n .$$

To dowodzi (*).