Lista tematów na egzamin ustny z AMII.1

Lista ma być dla Państwa wskazówką, a dla mnie pomocą przy przeprowadzeniu egzaminu. Oczywiście w trakcie egzaminu mogę (i będę) zadawać pytania nie ujęte w tej liście (w sumie żadnych pytań na niej nie ma, nieprawdaż?).

1. Własności norm w przestrzeniach euklidesowych, twierdzenie o równoważności norm.
2. Funkcje ciągłe na zbiorach otwartych w $\mathbb{R}^n$ i ich własności.
3. Pochodne cząstkowe, pochodne kierunkowe i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych. Twierdzenie o wartości średniej.
4. Twierdzenie Schwarza o równości pochodnych mieszanych. Twierdzenie o pochodnej złożenia.
5. Wzór Taylora i notacja wielowskaźnikowa.
6. Ekstrema lokalne i ich badanie przy pomocy pierwszej i drugiej pochodnej funkcji.
7. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym.
8. Twierdzenia: o funkcji odwrotnej i o funkcji uwikłanej.
9. Definicja rozmaitości zanurzonej klasy C^k i różne sposoby opisu rozmaitości. Przestrzeń styczna do rozmaitości.
10. Ekstrema warunkowe (warunki konieczne i dostateczne ich istnienia) i mnożniki Lagrange'a.
11. Ciała i σ-ciała zbiorów, zbiory borelowskie.
12. Miara i miara zewnętrzna - definice, podstawowe własności i przykłady.
13. Warunek Carathéodory'ego, zbiory mierzalne.
14. Konstrukcja i własności miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.
15. Zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a. Przykład Vitaliego.
16. Funkcje mierzalne - definicja i podstawowe własności.
17. Przybliżanie funkcji mierzalnych funkcjami prostymi. Przybliżanie funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a funkcjami schodkowymi i ciągłymi.

18. Twierdzenia Łuzina i Jegorowa.
19. Całka Lebesgue'a z funkcji nieujemnej i jej podstawowe własności.
20. Całkowanie funkcji o dowolnym znaku.
21. Związki całki Lebesgue'a i Riemanna.
22. Twierdzenia o zbieżności całek: Twierdzenie o zbieżności monotonicznej, Lemat Fatou, Twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej, z przykładami.

(Niewyczerpująca) lista warunków dostatecznych uzyskania oceny niedostatecznej z AMII.1

1. Nieznajomość definicji ciągłości funkcji wielu zmiennych.
2. Nieznajomość twierdzenia Weierstrassa i własności Darboux dla funkcji wielu zmiennych.
3. Nieznajomość definicji pochodnej cząstkowej, kierunkowej i macierzy Jacobiego. Mylenie różniczkowalności z istnieniem pochodnych cząstkowych.
4. Nieznajomość definicji ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych oraz warunków koniecznych i dostatecznych jego istnienia.
5. Nieumiejętność korzystania z wzoru na pochodną złożenia dla funkcji wielu zmiennych.
6. Nieznajomość wzoru Taylora dla funkcji wielu zmiennych.
7. Nieznajomość twierdzeń o funkcji odwrotnej i o funkcji uwikłanej.
8. Nieznajomość definicji wektora stycznego do zbioru.
9. Nieznajomość definicji rozmaitości zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.
10. Nieznajomość związku gradientu funkcji z własnościami poziomic tejże funkcji.
11. Nieznajomość definicji ekstremum warunkowego i twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a.
12. Nieznajomość konstrukcji miary Lebesgue'a i jej podstawowych własności.

13. Nieznajomość twierdzeń o przybliżaniu zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a zbiorami otwartymi, domkniętymi, typu G_δ i F_σ.

14. Nieznajomość definicji całki Lebesgue'a z funkcji mierzalnych (nieujemnych i o dowolnym znaku).

15. Nieumiejętność udowodnienia, że całki Lebesgue'a i Riemanna z funkcji całkowalnej w sensie Riemanna na odcinku $[a, b]$ są równe.

16. Nieznajomość sformułowania przynajmniej dwóch z trzech twierdzeń o zbieżności całek: Twierdzenia o zbieżności monotonicznej, Lematu Fatou, Twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Przynajmniej dla jednego z nich należy umieć podać przykład na istotność założeń.