Funkcje mierzalne

Przestrzeń mierzalna / przestrzeń z miarą

to trójka: X zbiór

$\mathcal{F}$ σ-ciało podzbiorów X

μ miara na $\mathcal{F}$

Funkcja $f: X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna (wzgl. σ-ciała $\mathcal{F}$, a gdy nie jest jasno napisane / nie wynika z kontekstu, o jakie $\mathcal{F}$ chodzi, to wzgl. σ-ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a), gdy ~~przeciwobraz każd.~~

równoważnie

1) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{F}$

$$\{x \in X : f(x) > a\}$$

2) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$

3) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$

4) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$

5) $\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ 5') $\forall_{A \text{ otwartego}} \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

Szkic dowodu:

1) ⇒ 3) $A = \{x \in X : f(x) \le a\} = X \setminus \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathcal{F}}}{\{x \in X : f(x) > a\}} =$

więc $A \in \mathcal{F}$.

3) ⇒ 2) $\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) \le a - \frac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}}$

2) ⇒ 4) $\{x \in X : f(x) \ge a\} = X \setminus \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathcal{F}}}{\{x \in X : f(x) < a\}}$.

5) ⇒ 1), 2), 3), 4) oczywiste; ~~zbiory~~ półproste są w $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

5') ⇒ 1), 2)

1) ⇒ 5)

Każdy zbiór ~~przedziału~~ otwarty w $\mathbb{R}$ jest sumą przel. wielu przedziałów otwartych

każdy przedział jest częścią wspólną 2 półprostych

Rodzina $\{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ tworzy σ-ciało (wystarczy sprawdzić), i zawiera wszystkie półproste

⇓

—"— przedziały

⇓

—"— zbiory otwarte

⇓

—"— zbiory borelowskie □

5) ⇒ 5')

Tw. f, g mierzalne, to

a) $\cancel{\{f<g\}}$ $\{x\in X : f(x) < g(x)\}$

b) $\{x\in X : f(x) \le g(x)\}$

c) $\{x\in X : f(x) = g(x)\}$

~~są mierzalne~~ należą do $\mathcal{F}$

Dowód

a) $$\{f(x)<g(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f(x) < q < g(x)\} =$$

$$= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underset{\in \mathcal{F}}{\{f(x)<q\}} \cap \underset{\in \mathcal{F}}{\{q<g(x)\}} \in \mathcal{F}.$$

~~mierzalne~~

b) $$\{f(x)\le g(x)\} = X \setminus \underset{\in \mathcal{F}}{\{g(x) < f(x)\}}$$

c) $$\{f(x)=g(x)\} = \{f(x) \le g(x)\} \cap \{f(x) \ge g(x)\}.$$

Tw. Jeżeli $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ są mierzalne, to

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} f_i \qquad \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i \qquad \liminf_{i\to\infty} f_i \qquad \limsup_{i\to\infty} f_i$$

też są mierzalne.

<u>Twierdzenie</u> Niech $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych, $f_i : X \to \mathbb{R}$. Wtedy

a) $\inf f_i$, $\sup f_i$, $\liminf f_i$, $\limsup f_i$ są funkcjami mierzalnymi

~~b) Jeżeli (f_i) jest ciągiem zbie~~

<u>Wniosek</u> $f_i \xrightarrow[\text{punktowo}]{} f$ i f_i są mierzalne, to f też jest mierzalna.

<u>Dowód tw.</u>

$$\{x\in X : \inf_i f_i(x) < a\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists_i \; f_i(x) < a$$

$$\{x\in X : \exists_i \; f_i(x) < a\} = \bigcup_i \underbrace{\{x\in X : f_i(x) < a\}}_{\in \mathcal{F}}$$

stąd $\inf f_i$ jest mierzalna. Analogicznie

$$\{\sup f_i > a\} = \bigcup \underbrace{\{f_i > a\}}_{\in \mathcal{F}}.$$

$$\liminf_{i\to\infty} f_i(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\inf_{n>i} f_n(x)\right)$$

$$\limsup f_i = \inf_{i\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n>i} f_n(x)\right)$$

$\square$

Twierdzenie: Złożenie $g \circ f : X \to \mathbb{R}$,

gdzie $f : X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła

jest funkcją mierzalną.

Dowód:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

Jeżeli A jest ~~borelowski~~, otwarty, to również $g^{-1}(A)$ jest otwarty (bo g ciągła); $f^{-1}(g^{-1}(A))$ jest zatem w $\mathcal{F}$.

Wniosek f mierzalna, to f^2, $|f|$

$\frac{1}{f}$, gdy $f(x) \neq 0 \ \forall_x$

są mierzalne.

Uwaga! Odwrotne złożenie

mierzalna $\circ$ ciągła

nie musi być mierzalne!

Przykład (dość rozbudowany).

Zadanko 1. Jeżeli zbiór $E \subset \mathbb{R}$ jest mierzalny i ma miarę Lebesgue'a > 0, to zbiór $Y = \{x - y : x \in E, y \in E\}$ zawiera przedział o środku w 0.

Rozwiązanie

Możemy bso założyć, że E jest ograniczony (biorąc zamiast E jego przecięcie z dużą kulą).

Niech $\Omega \supset E$ będzie zbiorem otwartym, ograniczonym i takim, że $\lambda(\Omega) \overset{(*)}{<} \frac{4}{3}\lambda(E)$. Ω, jako otwarty, jest sumą rozłącznych przedziałów otwartych:

$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$; oznaczmy $E_j = E \cap I_j$

Nie może być $\forall_j \ \lambda(I_j) \geq \frac{4}{3}\lambda(E_j)$, bo to przeczyłoby $(*)$ (zbiory E_j są rozłączne i mierzalne)

Niech zatem k będzie takie, że $\lambda(I_k) \overset{(**)}{\leq} \frac{4}{3}\lambda(E_k)$

Niech teraz $\delta \in (-\frac{1}{2}|I_k|, \frac{1}{2}|I_k|)$. Wykażemy, że $\delta \in Y$. Załóżmy bowiem przeciwnie: że istnieje $\delta \in (-\frac{1}{2}|I_k|, \frac{1}{2}|I_k|)$ t. że $\delta \notin Y$. Wtedy $E \cap (E+\delta) = \emptyset$, a więc w szczególności $E_k \cap (E_k + \delta) = \emptyset$.

Wtedy

$$2\lambda(E_k) = \lambda(E_k) + \lambda(E_k+\delta) = \lambda\big(\overset{\subset I_k}{E_k} \cup \overset{\subset I_k+\delta}{(E_k+\delta)}\big) \leq \lambda(I_k \cup (I_k+\delta))$$

$= |I_k| + |\delta| \leq \frac{3}{2}|I_k|$, co przeczy $(**)$.

to jest przedział długości $|I_k| + |\delta|$

Zadanko 2 Każdy zbiór $A \subset \mathbb{R}$ o dodatniej zewn. mierze Lebesgue'a zawiera zbiór niemierzalny.

Rozwiązanie: Niech V będzie zbiorem Vitaliego w $\mathbb{R}$ (tj selektorem relacji $\sim$: $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$)

~~Wtedy~~ Niech $V_t = V + t$. Wtedy

- gdy $t, s \in \mathbb{Q}$, $t \neq s$, to $V_t \cap V_s = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{t \in \mathbb{Q}} V_t = \mathbb{R}$

Niech teraz $A_t = A \cap V_t$. Oczywiście

$A = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} A_t$, (A_t) są rozłączne, więc

$$0 < \lambda^*(A) \overset{(\boxtimes)}{\leq} \sum_{t \in \mathbb{Q}} \lambda^*(A_t).$$

Mamy 3 możliwości

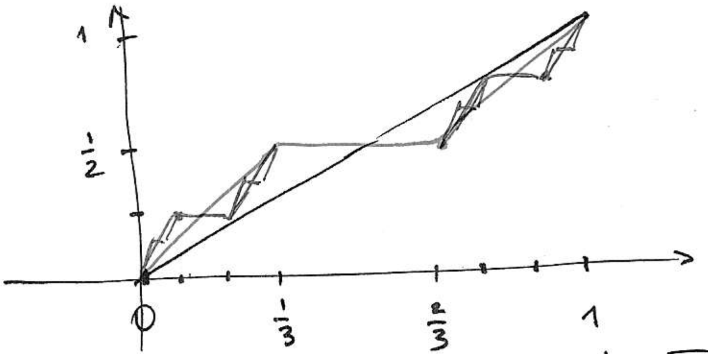
1) albo wszystkie A_t są mierzalne i miary 0 sprzeczność z $(\boxtimes)$.
2) albo ~~któryś~~ $\exists_t$ A_t jest mierzalny i miary >0.

Wtedy $Y = \{x - y : x, y \in A_t\}$ zawiera pewien przedział o środku w 0.

$$Y \subset \{x-y : x, y \in V_t\} = \{x-y : x, y \in V\}$$ ← ale tu nie ma żadnej liczby wymiernej! ↯

3). Któryś ze zbiorów A_t jest niemierzalny. $\square$.

Schody Cantora



$f_0(x) = x$

$f_1 \equiv \frac{1}{2}$ na $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

rośnie liniowo na $[0, \frac{1}{3}]$

i $[\frac{2}{3}, 1]$

itd.

f_2 rośnie na 4 przedziałach, każdy długości $\frac{1}{9}$

f_k ~~jest~~ rośnie na 2^k przedziałów, każdy dług. $\frac{1}{3^k}$.

$\left| f_{m+k}(x) - f_k(x) \right| \leq \frac{1}{2^k}$, więc ciąg (f_k) funkcji ciągłych i ~~rosnących~~ niemalejących, spełnia na $[0,1]$ jednost. warunek Cauchy'ego. Jego granica f jest funkcją ciągłą, ~~rosnącą~~ niemalejącą, która jest stała na każdym przedziale w dopełnieniu zbioru Cantora C

f rośnie od 0 do 1, ale rośnie <u>tylko</u> na zbiorze Cantora! (a ten ma miarę 0)

Zauważmy też, że f jest różniczkowalna poza C i $\forall_{x \notin C}$ $f'(x) = 0$.

Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją Cantora (schodami Cantora). ~~Wówczas~~ Zdefiniujmy $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + x$. Wówczas

1) g jest funkcją ciągłą (bo f jest ciągła) i ściśle rosnącą (bo jest sumą niemalejącej i rosnącej), jej obrazem jest $[0,2]$

$\Rightarrow$ 2) $g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ jest funkcją ciągłą

3) Niech ~~Ca~~ $C \subset [0,1]$ będzie zbiorem Cantora.

Wtedy $\lambda(g(C)) = 1$.

Wynika to stąd, że $[0,1] \setminus C$ to przeliczalna suma odcinków otwartych parami rozłącznych: $[0,1] \setminus C = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

Na każdym z nich f jest stała: $f|_{I_i} = \alpha_i = \text{const}$

więc $g|_{I_i}(x) = x + \alpha_i$, zatem $g(I_i) = I_i + \alpha_i$

$$\lambda(g(I_i)) = \lambda(I_i + \alpha_i) = \lambda(I_i)$$

$$\lambda(g([0,1] \setminus C)) = \lambda\Big(g\big(\bigcup_i I_i\big)\Big) = \lambda\Big(\bigcup_i g(I_i)\Big) = \sum_i \lambda(g(I_i))$$

g ściśle rosnąca, więc $g(I_i)$ też parami rozłączne

$$\lambda(g([0,1] \setminus C)) = \lambda([0,2] \setminus g(C)) = 2 - \lambda(g(C))$$

$$\sum_i \lambda(g(I_i)) = \sum_i \lambda(I_i) = \lambda\Big(\bigcup_i I_i\Big) = \lambda([0,1] \setminus C) = 1 - \lambda(C) = 1$$

4) Oznaczmy $E = g(C)$. $\Rightarrow \lambda(E) > 0$, więc z Zadania 2. wiemy, że $\exists_{A \subset E}$, A niemierzalny.

Niech $M = g^{-1}(A) \subset C$.

Zbiór Cantora ma miarę 0, więc M też, w szczególności M jest mierzalny.

<u>Uwaga</u>: funkcja g przekształca } g ciągła, i to jednostajnie, ściśle rosnąca!

- Zbiór Cantora C miary zero w zbiór E miary dodatniej
- ~~z~~ mierzalny zbiór M w niemierzalny zbiór A

Zatem ~~funkcja na~~ obraz zbioru mierzalnego w funkcji mierzalnej, czy nawet ciągłej, nie musi być mierzalny! !

5) Niech $h = \chi_M$ (tj $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \in M \end{cases} \;)$$

h jest mierzalna, bo $h^{-1}((a,\infty]) = \begin{cases} \emptyset & a \geq 1 \\ M & a \in [0,1) \\ \mathbb{R} & a < 0 \end{cases}$

wszystkie trzy są mierzalne.

$$\underset{\text{mierzalna}}{h} \circ \underset{\text{ciągła}}{g^{-1}} : [0,2] \to \mathbb{R}$$

$$(h \circ g^{-1})^{-1}((0,\infty]) = g(h^{-1}((0,\infty])) =$$

$$= g(M) = A \longleftarrow \text{niemierzalny!}$$

Stąd takie złożenie nie jest funkcją mierzalną!

Wróćmy do funkcji mierzalnych

Mówimy, że dwie funkcje rzeczywiste są równe prawie wszędzie, ~~gdy~~ na zbiorze Ω, gdy $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ ma miarę zero.

Piszemy wtedy $f \doteq g$ p.w. lub a.e.

Ogólniej: Mówimy, że pewna własność zachodzi p.w. w zbiorze Ω, gdy $\{x \in \Omega :$ własność nie zachodzi w $x\}$ jest miary zero.

Twierdzonko: Jeżeli $f = g$ p.w. na X, f mierzalna na X, to g też.

Dowodzik:

$\forall_a$ $f^{-1}((a,\infty])$ i $g^{-1}((a,\infty])$ różnią się o podzbiór zbioru $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, a więc o zbiór miary zero. Jeżeli jeden jest więc mierzalny, to drugi też.

Definicje

1) Funkcja prosta $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ to funkcja mierzalna, której zbiór wartości jest skończony

Tw. f prosta $\Longleftrightarrow$ istnieją ~~rodzina~~ parami rozłącznych zbiorów mierzalnych $\{A_i\}_{i=1}^k$ ~~że~~

~~$\forall_x f$~~ oraz stałe $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$

takie, że

$$\forall_{x\in X} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

<u>Dowód</u>

$\Leftarrow$ oczywiste

$\Rightarrow$ Niech ~~$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$~~, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ będzie zbiorem wartości f.

Oznaczmy $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$

oczywiście $\{A_j\}$ są mierzalne (bo f mierzalna, $\{\alpha_j\}$ borelowski),

parami rozłączne

i $f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$.

<u>Uwaga</u>: Jeżeli $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ i A_i są mierzalne (ale niekoniecznie parami rozłączne), to i tak f jest funkcją prostą.

<u>Dowód</u>: Zadanko.

<u>Wniosek</u>: Skończone kombinacje liniowe funkcji prostych są funkcjami prostymi

<u>Uwaga</u>: jeżeli g ciągła, h prosta, to $g\circ h$ prosta

$h\circ g$ niekoniecznie, choć wciąż ma sk. wiele wartości.

<u>Tw</u>. Niech $f: X \to [0,\infty]$ będzie nieujemną funkcją mierzalną.

Istnieje wówczas niemalejący ciąg funkcji prostych $f_n: X \to [0,\infty]$ zbieżny punktowo do f.

Jeżeli f jest dodatkowo ograniczona, to ~~zbieżny~~ ~~f_n~~ zbieżność ta może być jednostajna.

<u>Dowód</u>

Niech $$A_{m,n} = \left\{ x \in X : \frac{m}{2^n} \le f(x) < \frac{m+1}{2^n} \right\}$$
dla $m = 0, 1, \ldots, n \cdot 2^n - 1$

$$A_{n2^n,n} = \{ x \in X : f(x) \ge n \}$$

$A_{m,k}$ są mierzalne, parami rozłączne,

$$f_n = \sum_{m=0}^{n \cdot 2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}$$

- $f_n \le f$ na X, bo na $A_{m,n}$ $f_n = \frac{m}{2^n} \le f$
- jeżeli $f(x) < \infty$, to dla $n > f(x)$ mamy
$$f_n(x) \le f(x) < f_n(x) + \frac{1}{2^n}$$
więc $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ na $\{f < \infty\}$
- jeżeli $f(x) = +\infty$, to $\forall_n$ $x \in A_{2^n,n}$
$$f_n(x) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty = f(x)$$

Zadanko:

$$f_{n+1} \geq f_n$$

Łatwo widać, że gdy f ograniczona, to

dla $n > \sup\limits_X f$

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$$

więc $\quad f_n \rightrightarrows f.$

Twierdzenie - Wniosek

Jeżeli f jest mierzalna na X, to istnieje ciąg funkcji prostych zbieżny punktowo do f

Dowód: $\quad f = f_+ - f_-$

$$\left.\begin{aligned} f_+ &= \max(f, 0) \\ f_- &= -\min(f, 0) \end{aligned}\right\} \text{mierzalne}$$

$\varphi_n \nearrow f_+$ proste

$\psi_n \nearrow f_-$ proste

$$f_n = \varphi_n - \psi_n$$

Zadanko: wtedy $|f_n| \leq |f_{n+1}|$, $|f_n| \nearrow |f|$

Na poprzednim wykładzie udowodniliśmy, że

Twierdzenie: Jeżeli $f: X \to \mathbb{R}$ jest nieujemną funkcją mierzalną, to istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych $f_k: X \to \mathbb{R}$ zbieżny do f punktowo (a gdy f jest ograniczona, to nawet jednostajnie).

Stąd od razu dostajemy wniosek:

Wniosek: Jeżeli $f: X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to istnieje ciąg (f_n) funkcji prostych, zbieżnych do f punktowo, a jeżeli f jest ograniczona, to jednostajnie; dodatkowo $(|f_n|)$ jest ciągiem niemalejącym. (i oczywiście $|f_n| \to |f|$ na X).

Dowód: Prościutkie, ćwiczenie, trzeba wziąć

$f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = -\min(f, 0)$,

wtedy f_+, f_- są mierzalne i nieujemne, $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$; stosujemy Twierdzenie oddzielnie do f_+ i f_-

Lemat (I zasada Littlewooda)

Niech $E \subset \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny, o mierze skończonej. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją parami rozłączne przedziały $R_1, \dots, R_N$ takie, że $\lambda(E \triangle \bigcup_{i=1}^{N} R_i) < \varepsilon$.

(Zbiór o mierze skończonej jest prawie skończoną sumą rozłącznych przedziałów).

$\left\{ \begin{array}{l} A \triangle B = \\ A \setminus B \cup B \setminus A \end{array} \right.$

Ćwiczenie: Jeżeli E ma miarę nieskończoną, to $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{R_1, R_2, \dots}$ parami rozłączne przedziały t.że $\lambda(E \triangle \bigcup_i R_i) < \varepsilon$.

Dowód Lematu:

Z def. miary Lebesgue'a istnieją przedziały $P_1, P_2, \dots$ takie, że $E \subset \bigcup_i P_i$, $\sum_i vol(P_i) \leq$
$\leq \lambda(E) + \varepsilon/3$.

Skoro $\lambda(E) < \infty$, to szereg $\sum_i vol(P_i) < \infty$, więc istnieje M t.że $\sum_{i=M+1}^{\infty} vol(P_i) < \varepsilon/3$.

Wtedy $\lambda(E \triangle \bigcup_{i=1}^{M} P_i) = \lambda(E \setminus \bigcup_{i=1}^{M} P_i) + \lambda(\bigcup_{i=1}^{M} P_i \setminus E)$

$\leq \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \setminus \bigcup_{i=1}^{M} P_i) + \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \setminus E) \leq$

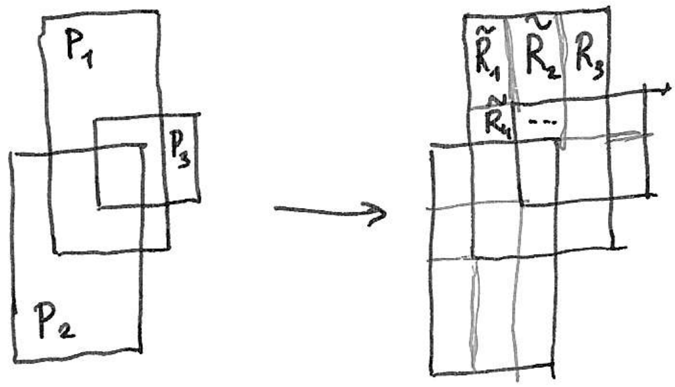
$\leq \lambda(\bigcup_{i=M+1}^{\infty} P_i) + \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) - \lambda(E) \leq$

$\leq \sum_{i=M+1}^{\infty} vol(P_i) + \sum_{i=1}^{\infty} vol(P_i) - \lambda(E) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon.$

Przedziały $P_1, \dots, P_M$ są już prawie dobre, ale nie są rozłączne. Nb to je urozłącznimy.

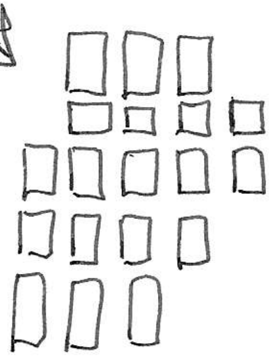
<u>Krok 1</u>: tniemy P_i płaszczyznami zawierającymi ściany wszystkich P_j:

Dostajemy rodzinę przedziałów $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$, które są prawie rozłączne – co najwyżej stykają się ścianami. Mamy też $\bigcup_{i=1}^{M} P_i = \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j$,



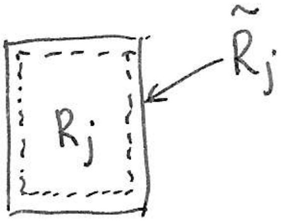
więc

$$\lambda\Big(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j\Big) < \frac{2}{3}\varepsilon$$



<u>Krok 2</u> Każdy z $\tilde{R}_j$ troszeczkę kurczymy (nie ruszając środka), tak, by $\bigcup_{j=1}^{N} (\tilde{R}_j \setminus R_j) < \varepsilon/3$

R_j po skurczeniu



Wtedy

$$\lambda\Big(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} R_j\Big) = \lambda\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} R_j\Big) + \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{N} R_j \setminus E\Big)$$

$$\leq \lambda\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j\Big) + \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{N} (\tilde{R}_j \setminus R_j)\Big) + \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j \setminus E\Big)$$

$$= \lambda\Big(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{R}_j\Big) + \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{N} (\tilde{R}_j \setminus R_j)\Big) < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$.

Lemat: Dla każdej funkcji prostej $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ i $E \subset \mathbb{R}^n$ o mierze skończonej istnieje funkcja schodkowa $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\lambda(\{x \in E : h(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Dowód

~~Twierdzenie~~ Lemat wystarczy udowodnić dla $h = \chi_A$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny. (Proszę się zastanowić dlaczego).

Zbiór $A \cap E$ jest mierzalny, o mierze skończonej, więc istnieją przedziały $R_1, \dots, R_N$ parami rozłączne t.ż. $(A \cap E) \triangle \bigcup_i R_i$ ma miarę $< \varepsilon$.

Ale wtedy
$$\{x \in E : \chi_A(x) \neq \sum_{i=1}^{N} \chi_{R_i}(x)\}$$
$$\subset$$
$$(A \cap E) \triangle \bigcup_i R_i$$

więc wystarczy wziąć $g(x) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{R_i}(x)$.

Uwaga: Dla każdej funkcji schodkowej g i $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła φ t.ż. $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq \varphi(x)\}$ ma miarę $< \varepsilon$,

więc w Lemacie możemy zamiast „schodkowa" napisać „ciągła":

Wniosek

Dla każdej funkcji prostej $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ i E o mierze skończonej istnieje funkcja ciągła $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że $\lambda(\{x \in E : h(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$

Zadanko: Czy istnieje $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ciągła taka, że
$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \neq \psi(x)\}) < \varepsilon \; ?$$

Twierdzenie Każda funkcja mierzalna f jest granicą ciągu funkcji schodkowych / ciągłych zbieżnego do f prawie wszędzie.

Dowód (dla funkcji schodkowych; dla ciągłych dokładnie tak samo)

Niech $g_k \to f$ będzie ciągiem funkcji prostych zbieżnym do f punktowo i niech, dla $k = 1, 2, \ldots$, h_k będzie funkcją schodkową taką, że $A_k = \{x \in [-k, k]^n : h_k(x) \neq g_k(x)\}$ ma miarę $< 2^{-k}$.

Oznaczmy $F_k = \bigcup_{j > k} A_j$, $F = \bigcap_k F_k$.

Zauważmy, że $\mathbb{R}^n \setminus F = \bigcup_k \bigcap_{j>k} \{x \in [-j,j]^n : h_j(x) = g_j(x)\}$,

jeżeli więc $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że ciągi $h_j(x)$ i $g_j(x)$ pokrywają się dla $j > k$.

Stąd $h_j(x) \longrightarrow f(x)$.

Zatem $\{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ zawiera się w F. ~~Obliczmy m~~ Oszacujmy miarę F:

$$\lambda(F_k) \leq \sum_{j>k} \lambda(A_j) \leq \sum_{j>k} 2^{-j} = 2^{-k}$$

$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, więc $\lambda(F) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = 0$. □

Twierdzenie Jegorowa (Egorova?) { III zasada Littlewooda

Niech $E \subset \mathbb{R}^m$ ma miarę skończoną, ~~$f_k \rightarrow f$~~ $f_k : E \to \mathbb{R}$ ciąg funkcji mierzalnych zbieżny do $f : E \to \mathbb{R}$ punktowo.

Wówczas $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{A_\varepsilon \subset E}$, A_ε domknięty, taki, że $\lambda(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ i $f_k \rightrightarrows f$ na A_ε

{ Ciąg funkcji mierzalnych zbieżny ~~do~~ punktowo jest zbieżny prawie (tzn. poza zbiorem małej miary) jednostajnie

Dowód

Oznaczmy $E_k^n = \{ x\in E : |f_j(x)-f(x)| < \frac{1}{n} \text{ dla } j>k \}$

Oczywiście $E_k^n \subset E_{k+1}^n$, a że $f_k \to f$, to $\bigcup_k E_k^n = E$.

Stąd $\lambda(E)=\lim_{k\to\infty}\lambda(E_k^n)$, więc $\forall_n \exists_{k_n}$ takie, że

$$\lambda(E\setminus E_{k_n}^n)=\lambda(E)-\lambda(E^n_{k_n})<2^{-n}$$

Niech teraz N będzie takie, że $2^{1-N}=\sum_{n\geq N}2^{-n}<\varepsilon/2$.

Oznaczmy $\tilde{A}_\varepsilon=\bigcap_{n\geq N}E^n_{k_n}$. Mamy

$$\lambda(E\setminus\tilde{A}_\varepsilon)\leq\sum_{n\geq N}(E\setminus E^n_{k_n})<\sum_{n\geq N}2^{-n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Jeżeli $x\in\tilde{A}_\varepsilon$, to $\forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq N}} x\in E^n_{k_n}$, więc

$\forall_n \forall_{j>k_n} \ |f_j(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}$. Czyli dla wszystkich $x\in\tilde{A}_\varepsilon$, jeżeli $j>k_n$, to $|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n}$.

To oznacza, że $f_j\rightrightarrows f$ na $\tilde{A}_\varepsilon$.

$\tilde{A}_\varepsilon$ nie jest domknięty (w każdym razie nie musi być), ale $\exists_{A_\varepsilon\subset\tilde{A}_\varepsilon}$, A_ε domknięty, tż $\lambda(A_\varepsilon)>\lambda(\tilde{A}_\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{2}$,

więc $\lambda(E\setminus A_\varepsilon)<\lambda(E\setminus\tilde{A}_\varepsilon)+\lambda(\tilde{A}_\varepsilon\setminus A_\varepsilon)<\varepsilon$. □

Tw. Łuzina (Lusina)

Niech $E \subset \mathbb{R}^n$ ma miarę skończoną, $f: E \to \mathbb{R}$ mierzalna.

Wtedy $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{A_\varepsilon \subset E}$, A_ε domknięty, taki, że $f|_{A_\varepsilon}$ jest ciągła i $\lambda(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Dowód: Niech f_n będzie ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym punktowo do f.

Z tw. Jegorowa istnieje $A_\varepsilon \subset E$, A_ε domknięty, taki, że $\lambda(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ i $f_n \rightrightarrows f$ na A_ε.

Wtedy f, jako jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych, jest ciągła na A_ε.

~~[illegible]~~

Dymitr Jegorow (1869 - 1931)

Mikołaj Łuzin (1883 - 1950)

John Edensor Littlewood (1885 - 1977)

Carlo Severini (1872 - 1951)