Całkowanie

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą.

Mówimy, że przeliczalna rodzina $\{E_1, E_2, \dots\}$ jest <u>rozbiciem</u> zbioru $E \in \mathcal{F}$, jeżeli

- $\forall_i \quad E_i \in \mathcal{F}$
- $\{E_i\}$ są parami rozłączne
- $E = \bigcup_i E_i$

Niech $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie nieujemna na $E \in \mathcal{F}$.
i mierzalna

Definiujemy
$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E f\,d\mu = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i) \right\}$$

supremum
po wszystkich rozbiciach $\{E_i\}$
zbioru E

<u>Umowa:</u> gdy $\inf_{E_i} f = \infty$,
a $\mu(E_i) = 0$, to iloczyn
jest równy 0.

Umowa: W teorii całki Lebesgue'a $\boxed{0\cdot\infty = 0}$

Własności całki z funkcji nieujemnych

(1) monotoniczność:

$0 \le f \le g$ na E, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalne,

to $\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$

wprost z definicji

(2) własność wartości średniej

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalna i nieujemna na $E \subset X$, $E \in \mathcal{F}$

to $\mu(E)\cdot \inf_E f \le \int_E f\,d\mu \le \mu(E)\sup_E f$

bo dla dowolnego rozbicia $\{E_i\}$ zbioru E mamy

$$\inf_E f \cdot \mu(E) = \inf_E f \sum_i \mu(E_i) = \sum_i \inf_E f\,\mu(E_i) \le$$

$$\le \underbrace{\sum_i \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i)}_{\substack{\text{supremum z tego} \\ \text{po wszystkich rozbiciach} \\ \text{to } \int_E f\,d\mu.}} \le \sum_i \sup_E f\,\mu(E_i) = \sup_E f\,\mu(E)$$

(3) Jeżeli $f = c = \text{const}$ na E, to $\int_E f\,d\mu = c\,\mu(E)$

od razu z (2) (uwaga na Umowę!)

(4) Jeżeli $\mu(E) = 0$, to $\forall f$ mierzalnej, nieujemnej,

$\int_E f\,d\mu = 0$ (też od razu z (2))

(5) $\forall_{\alpha \geq 0} \quad \int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$

zndw wprost z def. modulo przypadku $0 \cdot \infty$, załatwiane przez umowę.

(6) jeżeli $\mu(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) > 0$, to $\int_E f \, d\mu = \infty$

(bo możemy wziąć $\{x : f(x) = +\infty\}$ jako element rozbicia, wkład do $\sum \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i)$ od tego elementu będzie $+\infty$).

(7) **Twierdzenie**

Niech $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna i nieujemna.
Wówczas funkcja $\nu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ jest miarą.

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

Dowód:

Jest oczywiste, że $\forall_{A \in \mathcal{F}} \; \nu(A) \geq 0$ i $\nu(\emptyset) = 0$.
Pozostaje wykazać przeliczalną addytywność ν, tzn. jeżeli $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i zbiory A_i są parami rozłączne i mierzalne (tzn $\in \mathcal{F}$), to $\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

$$\Updownarrow$$

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu .$$

Niech $\{E_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ będzie, dla $i=1,2,\ldots$, rozbiciem zbioru A_i.
Wtedy $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ jest rozbiciem zbioru A,

więc

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{E_{ij}} f \cdot \mu(E_{ij}) \leq \int_A f \, d\mu$$

dla każdego $N \in \mathbb{N}$

$$\vee\!/$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{E_{ij}} f \cdot \mu(E_{ij}) \leq$$

Biorąc w nierówności

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \inf_{E_{ij}} f \, \mu(E_{ij}) \right) \leq \int_A f \, d\mu$$

supremum po wszystkich rozbiciach zbiorów $A_1, \ldots, A_N$

dostajemy nierówność

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} f \, d\mu \le \int_A f \, d\mu,$$

która zachodzi dla wszystkich $N \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu \le \int_A f \, d\mu. \qquad (*)$$

Niech teraz $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ będzie dowolnym, ustalonym rozbiciem zbioru A, tj $\{F_j\}$ są parami rozłączne, mierzalne i $\bigcup_j F_j = A$. Wtedy $\forall_i$ zbiory

$F_{ij} = A_i \cap F_j$ tworzą rozbicie zbioru A_i,

mamy też $\mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_j A_i \cap F_j\right) = \sum_j \mu(A_i \cap F_j) = \sum_j \mu(F_{ij})$

~~Stąd~~ $\cancel{\mu(F_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{F_j} f \mu(F_j) \le \sum \mu}$

oraz $\mu(F_j) = \mu\left(\bigcup_i A_i \cap F_j\right) = \sum_i \mu(A_i \cap F_j) =$

$$= \sum_i \mu(F_{ij})$$

Stąd $$\sum_{j=1}^{\infty} \inf_{F_j} f \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{F_j} f \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{F_j} f \, \mu(F_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{F_j} f \mu(F_{ij}) \le$$

to są szeregi o wyr. nieujemnych, więc wolno!

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{F_{ij}} f \cdot \mu(F_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu$$

bo $F_{ij} \subset F_j$

więc $\inf_{F_{ij}} f \geq \inf_{F_j} f$

Co z dowolności wzbicia $\{F_j\}$ daje $\int_A f \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu$.

To wraz z nierównością (*) dowodzi tezy twierdzenia.

Wnioski

① Jeżeli ~~$E_{1,2}$ E~~ $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, to

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \, d\mu = \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu$$

$\Rightarrow$ ② jeżeli $f = g$ p.w. na E, to $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$

Dowód: Niech $E_1 = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$

$E_2 = \{x \in E : f(x) = g(x)\} = E \setminus E_1$

$\mu(E_1) = 0$

Stąd

$$\int_E f \, d\mu = \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu = 0 + \int_{E_2} g \, d\mu =$$

$$= \int_{E_1} g \, d\mu + \int_{E_2} g \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

③. z monotoniczności miary ν

jeżeli $A \subset E$, $A, E \in \mathcal{F}$, to $\int_A f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$.

④ jeżeli f jest mierzalna i nieujemna na $E \in \mathcal{F}$

oraz $\int_E f\,d\mu = 0$, to $f = 0$ p.w. na E.

<u>Dowód</u>: Oznaczmy $E_m = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{m}\}$

Wtedy oczywiście $\int_{E_m} f\,d\mu \geq \frac{1}{m}\mu(E_m)$, mamy jednak

$$\int_{E_m} f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu = 0 \implies \frac{1}{m}\mu(E_m) = 0$$

czyli $\mu(E_m) = 0$. Mamy jednak

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots, \quad \bigcup_i E_i = \{x \in E : f(x) > 0\}$$

skąd $\mu(\underbrace{\{x \in E : f(x) > 0\}}_{\text{ozn. } A}) = \lim_{m \to \infty} \mu(E_m) = 0$

Poza zbiorem A, (miary zero) mamy $f(x) = 0$.

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej

Niech ciąg $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funkcji mierzalnych będzie niemalejący i niech $\forall_j \; f_j(x) \geq 0$ dla $x \in E$.

Wtedy
$$\int_E (\lim_{j\to\infty} f_j)\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \, d\mu .$$

istnieje $\forall_{x\in E}$ (a nawet x), bo $f_j(x) \nearrow$.

Dowód

Oznaczmy $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \in [0,\infty]$. Funkcja f, jako granica punktowa ciągu funkcji mierzalnych, jest mierzalna; mamy też $\forall_j \; f_j(x) \leq f(x)$, więc z monotoniczności całki
$$\int_E f_j \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu ,$$
więc
$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j \, d\mu .$$

Musimy wykazać odwrotną nierówność. W tym celu rozłóżmy E na 3 rozłączne zbiory:

$E_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}$ $\quad$ $E_+ = \{x \in E : f(x) \in (0,\infty)\}$

$E_\infty = \{x \in E : f(x) = \infty\}$.

Oczywiście wszystkie 3 są mierzalne; $E = E_0 \cup E_+ \cup E_\infty$.

$\boxed{E_0}$ Na E_0 $f(x)=0$, ciąg $(f_j(x))$ jest niemalejący i nieujemny, zatem $\forall_j\ f_j(x)=0$.

Stąd $\forall_j \int_{E_0} f_j \, d\mu = 0 = \int_{E_0} f \, d\mu$

$\boxed{E_+}$ Ustalmy liczbę $\theta \in (0,1)$.

~~Dla~~ Dla każdego $x \in E_+$

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) > \theta \cdot f(x)$$

więc $\exists_{m_x \in \mathbb{N}} \ \forall_{j > m_x} \ f_j(x) > \theta f(x)$. $(*)$

Oznaczmy $E_m = \{x \in E_+ : f_m(x) > \theta f(x)\}$

$(*)$ oznacza, że $\forall_{x\in E_+} \exists_{m_x} \forall_{j>m_x} \ x \in E_j$

Stąd $E_+ = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$.

Ciąg $f_j(x)$ jest monotoniczny, więc

$$f_m(x) > \theta f(x) \Rightarrow f_{m+1}(x) \geq f_m(x) > \theta f(x)$$

czyli

$$E_m \subset E_{m+1}$$

Oznaczając jak poprzednio $\nu = \int_{E_+} f \, d\mu$ mamy

$$\nu(E_+) = \int_{E_+} f\,d\mu \geq \int_{E_+} f_m\,d\mu \geq \int_{E_m} f_m\,d\mu \geq \theta \int_{E_m} f\,d\mu =$$

$$= \theta\nu(E_m) \longrightarrow \theta\nu(E_+)$$

bo $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, $\bigcup_i E_i = E_+$

więc

$$\nu(E_+) \geq \int_{E_+} f_m\,d\mu \geq \theta\nu(E_+)$$

$$\Downarrow$$

$$\nu(E_+) \geq \lim_{m\to\infty} \int_{E_+} f_m\,d\mu \geq \theta\nu(E_+)$$

Biorąc teraz $\lim_{\theta \to 1^-}$ dostajemy

$$\int_{E_+} f\,d\mu = \nu(E_+) = \lim_{m\to\infty} \int_{E_+} f_m\,d\mu .$$

$\boxed{E_\infty}$ ~~Oznaczmy $A_M = \{$~~ Ustalmy $M > 0$ i niech $A_m = \{x \in E_\infty : f_m(x) \geq M\}$

Jak poprzednio, $A_m \subset A_{m+1} \subset \ldots$, $\bigcup_m A_m = E_\infty$,

więc $\int_{E_\infty} f\,d\mu \geq \int_{E_\infty} f_m\,d\mu \geq \int_{A_m} f_m\,d\mu \geq M\mu(A_m)$;

biorąc $\lim_{m\to\infty}$ dostajemy ($\mu(A_m) \to \mu(E_\infty)$)

$$\int_{E_\infty} f\,d\mu \geq \cancel{M\mu(E_\infty)} \lim_{m\to\infty} \cancel{E}\int_{E_\infty} f_m\,d\mu \geq M\mu(E_\infty)$$

Biorąc dla odmiany $\lim\limits_{M\to\infty}$ dostajemy

$$\int_{E_\infty} f\,d\mu \geq \lim_{m\to\infty} \int_{E_\infty} f_m\,d\mu \geq \infty\cdot\mu(E_\infty) = \begin{cases} \infty & \text{gdy } \mu(E_\infty)>0 \\ \underbrace{0 \quad \text{gdy } \mu(E_\infty)=0}_{\text{umowa!}} & \end{cases}$$

$$= \int_{E_\infty} f\,d\mu$$

stąd $\displaystyle\int_{E_\infty} f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{E_\infty} f_m\,d\mu.$

Dodając stronami nierówności dla E_0, E_+ i E_∞ dostajemy nie tylko nierówność, ale wręcz równość z tezy twierdzenia.

<u>Obserwacja</u>: Jeżeli $h: X\to\mathbb{R}$ jest nieujemną funkcją prostą, $h = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\chi_{A_i}$ dla pewnych $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in[0,\infty)$, $A_1, A_2,\dots, A_N\in\mathcal{F}$, parami rozłącznych

to $\displaystyle\int_X h\,d\mu = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\,\mu(A_i)$.

<u>Dowód</u>: Oznaczmy $\nu(E) = \int_E h\,d\mu$; jak już wiemy, h jest miarą na X.

Stąd

$$\int_X h\,d\mu = \nu(X) = \nu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i\right) + \nu(A_1) + \ldots + \nu(A_N)$$

$$= \int_{X\setminus \bigcup_{i=1}^N A_i} h\,d\mu + \int_{A_1} h\,d\mu + \ldots + \int_{A_N} h\,d\mu = \int_{X\setminus \bigcup_i A_i} 0\,d\mu + \int_{A_1} \alpha_1\,d\mu + \ldots$$

$$\ldots + \int_{A_N} \alpha_N\,d\mu = 0 + \alpha_1 \mu(A_1) + \ldots + \alpha_N \mu(A_N)$$

<u>Wniosek:</u> Niech $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będą nieujemne i mierzalne. Wtedy $\forall_{E\in\mathcal{F}} \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$.

<u>Dowód:</u> Załóżmy na początek, że f i g są funkcjami prostymi: $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^M \beta_j \chi_{B_j}$

Ustalmy $E \in \mathcal{F}$ i niech $\tilde{A}_i = A_i \cap E$, $\tilde{B}_j = B_j \cap E$,

$$\tilde{A}_0 = E \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i \qquad \alpha_0 = 0$$

$$\tilde{B}_0 = E \setminus \bigcup_{j=1}^M B_j. \qquad \beta_0 = 0$$

Wtedy dla $x \in E$ mamy $f(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \chi_{\tilde{A}_i}(x)$

$$g(x) = \sum_{j=0}^M \beta_j \chi_{\tilde{B}_j}(x)$$

i $\bigcup_{i=0}^N \tilde{A}_i = \bigcup_{j=0}^M \tilde{B}_j = E$.

$$\parallel$$

$$\bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=0}^M \underbrace{\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j}$$ ← i te zbiory są parami rozłączne.

Wtedy

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_{\bigcup_{i=0}^{N}\bigcup_{j=0}^{M} \tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j} (f+g)\,d\mu = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \int_{\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j} (f+g)\,d\mu =$$

ale na $\tilde{A}_i$ f jest równe α_i
na $\tilde{B}_j$ g jest równe β_j $\Longrightarrow$ na $\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j$ $f+g$ jest równe $\alpha_i+\beta_j$

$$= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} (\alpha_i+\beta_j)\,\mu(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \alpha_i\,\mu(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j) + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \beta_j\,\mu(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \underbrace{\sum_{j=0}^{M} \mu(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j)}_{=\mu(\tilde{A}_i)} + \sum_{j=0}^{M} \beta_j \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \mu(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j)}_{\mu(\tilde{B}_j)}$$

$$= \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Teraz, dla dowolnych (niekoniecznie prostych) f i g.

Wiemy, że istnieją niemalejące ciągi funkcji prostych: $f_k \nearrow f$ i $g_k \nearrow g$. Oczywiście $f_k+g_k \nearrow f+g$.

Z poprzedniego kroku wiemy, że $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ \forall_{E\in\mathcal{F}}$

$$\int_E (f_k+g_k)\,d\mu = \int_E f_k\,d\mu + \int_E g_k\,d\mu$$

a z tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej możemy przejść do granicy

$$\Big\downarrow{\scriptstyle k\to\infty} \qquad\qquad\qquad \Big\downarrow$$

$$\int_E (f+g)\,d\mu \qquad\qquad \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu. \qquad \square$$

<u>Wniosek</u>: Całka jest „prawie" liniowa względem funkcji całkowanej: $\forall_{\alpha,\beta\geq 0}\ \forall_{f,g}$ nieujemnych i mierzalnych $\forall_{E\in\mathcal{F}}$

$$\int_E (\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_E f\,d\mu + \beta\int_E g\,d\mu.$$

Jak całkować funkcje mierzalne, które niekoniecznie są nieujemne?

Prosto: niech $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = -\min(f,0)$

$$f = f_+ - f_-$$

<u>Z definicji</u>, $\forall_{E\in\mathcal{F}}$

$$\int_E f\,d\mu \overset{DEF}{:=} \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu$$

Funkcje f_+ i f_- to „część dodatnia" i „część ujemna" f – obie są mierzalne i nieujemne.

O ILE PRZYNAJMNIEJ JEDNA Z CAŁEK PO PRAWEJ STRONIE JEST SKOŃCZONA (nie chcemy rozstrzygać problemu ile to jest $\infty-\infty$)

Natychmiast można sprawdzić, ~~korzystając z już udowodni~~ że tak zdefiniowana całka ma znane nam już dla funkcji nieujemnych własności:

① jeżeli f jest stała na E, to $\int_E f\,d\mu = c\mu(E)$
$f \equiv c = const$

② jeżeli $\mu(E)=0$, to $\forall_f$ mierzalnej $\int_E f\,d\mu = 0$

③ f jest całkowalna na E (tj. $-\infty < \int_E f\,d\mu < \infty$)
wtedy i tylko wtedy, gdy $|f|$ jest całkowalny na E

<u>Dowód</u>: $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$

Jeżeli $\int_E f\,d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \in \mathbb{R}$, to obie całki

$\int_E f_+ d\mu$ i $\int_E f_- d\mu$ są skończone, skąd (liniowość całki)

również $\int_E |f|\,d\mu = \int_E (f_+ + f_-)\,d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu$

jest skończona.
Odwrotna implikacja tak samo.

④ funkcja całkowalna (tj. taka f, dla której $\infty < \int f \, d\mu < \infty$)

jest skończona p.w.

Dowód: f nie może być ~~dodatnia~~ $+\infty$ na zbiorze dodatniej miary w E, bo wtedy $\int_E f_+ \, d\mu = \infty$,

ani $-\infty$, bo wtedy $\int_E f_- \, d\mu = 0$ { a wiemy z dowodu ③, że dla funkcji całkowalnej całki z części dod. i ujemnej są skończone

⑤ jeżeli $f \leq g$ na E, to

$$\int_E f \leq \int_E g$$ { od razu z definicji

⑥ $\inf_E f \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq \sup_E f \cdot \mu(E$

wynika od razu z ⑤, ④ i faktu, że

$$\inf_E f \leq f \leq \sup_E f \quad \text{na } E.$$

⑦ $\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu$

bo $f \leq |f|$ i $-f \leq |f|$, więc

$\int_E f \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu$; $\int_E (-f) \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$

$\int_E (-f) \, d\mu = -\int_E f \, d\mu$ bo $(-f)_+ = f_-$, $(-f)_- = f_+$

(8) Jeżeli $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, E_i parami rozłączne,

to $\int_E f\,d\mu = \sum_i \int_{E_i} f\,d\mu$ } wprost z definicji i analogicznej własności dla f nieujemnych

(9) jeżeli $\int_E f\,d\mu$ i $\int_E g\,d\mu$ są określone

i ich ~~różnica~~ suma nie jest wyrażeniem nieokreślonym,

~~to~~ (tj $+\infty + (-\infty)$ lub $-\infty + (+\infty)$)

to $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$

Dowód: ~~Znów wprost z definicji, wystarczy zauważyć, że~~ $\cancel{(f+g)_+ = f_+ + g_+}$ $\cancel{(f+g)_-}$

Z tym jest trochę roboty, bo

$(f+g)_+$ niekoniecznie jest równe $f_+ + g_+$

a $(f-g)_- \neq f_- - g_-$, więc nie można

powołać się na definicję, twierdząc, że

to od razu widać.

Załóżmy na początek, że f i g są całkowalne na E

(tj $\int_E f\,d\mu$ i $\int_E g\,d\mu$ są skończone)

Z ③ wiemy, że h całkowalna $\iff$ $|h|$ całkowalna.

Mamy

$$0 \overset{(5)}{\le} \int_E |f+g|\,d\mu \overset{(4)}{\underset{(5)}{\le}} \int_E (|f|+|g|)\,d\mu \overset{\substack{\text{liniowość} \\ \text{dla funkcji nieujemnych}}}{\le} \int_E |f|\,d\mu + \int_E |g|\,d\mu$$

więc z całkowalności f i g wynika całkowalność $f+g$.

Mamy też

~~f_+~~

$$f+g = (f+g)_+ - (f+g)_-$$

$$\|$$

$$f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

więc ~~$(f+g)_+$~~

$$f_+ + g_+ - (f+g)_+ \overset{(*)}{=} f_- + g_- - (f+g)_-$$

i łatwo widać, że obie strony tej równości są nieujemne. Korzystając z tej równości i liniowości całki dla funkcji nieujemnych dostajemy

$$\int_E f_+\,d\mu + \int_E g_+\,d\mu = \int_E (f_+ + g_+)\,d\mu \overset{(*)}{=} \int_E \Big((f+g)_+ + \big(f_- + g_- - (f+g)_-\big)\Big)\,d\mu =$$

$$= \int_E (f+g)_+ \, d\mu + \int_E (f_- + g_- - (f+g)_-) \, d\mu$$

liniowość dla nieujemnych

Analogicznie

$$\int_E f_- \, d\mu + \int_E g_- \, d\mu = \int_E (f_- + g_-) \, d\mu \overset{*}{=} \int_E \left((f+g)_- + \left(f_+ + g_+ - (f+g)_- \right) \right) d\mu$$

$$= \int_E (f+g)_- \, d\mu + \int_E (f_+ + g_+ - (f+g)_-) \, d\mu$$

Odejmując stronami obie równości dostajemy

$$\underbrace{\int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu}_{= \int_E f \, d\mu} + \underbrace{\int_E g_+ \, d\mu - \int_E g_- \, d\mu}_{= \int_E g \, d\mu} = \underbrace{\int_E (f+g)_+ \, d\mu - \int_E (f+g)_- \, d\mu}_{= \int_E (f+g) \, d\mu}$$