Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.

Rozważmy funkcję $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym.
Gdy ustalimy punkt $x \in U$, znajdziemy $\varepsilon > 0$ takie, że $B(x,\varepsilon) \subset U$.
Niech teraz $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Dla każdego $i = 1,2,3,\dots,n$ możemy zdefiniować funkcję $g_i : \underset{\subset \mathbb{R}}{(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)} \to \mathbb{R}$

$$g_i(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Inaczej mówiąc, ustalamy wszystkie współrzędne $x_1, \dots, x_n$ poza i-tą – w ten sposób funkcja f nie zależy już od n różnych zmiennych, ale tylko od jednej zmiennej x_i.

Pochodną ~~w punk~~ funkcji g_i w punkcie $t = x_i$ nazywamy i-tą pochodną cząstkową funkcji f w $x = (x_1, \dots, x_n)$ i oznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

(czasem też $f_{x_i}(x)$, $D^i f(x)$ itp)

<u>Przykład</u>: Niech $f(x,y,z) = \ln(x^2+z^2+1) + yze^x + \frac{x}{y^2+1}$

Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+z^2}\cdot 2x + yze^x + \frac{1}{y^2+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^x + x\cdot\frac{-2y}{(y^2+1)^2} = ze^x - \frac{2xy}{(y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+z^2}\cdot 2z + ye^x$$

<u>Inny przykład</u>

Niech $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$

Wówczas $f(t,0) = 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, podobnie $f(0,t) = 0$. Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Oczywiście f <u>nie jest</u> ciągła w $(0,0)$ (ani w żadnym innym punkcie). Stąd widać, że istnienie pochodnych cząstkowych

50

w jakimś punkcie NIE GWARANTUJE ciągłości funkcji w tym punkcie.

Definicja

~~Jeżeli~~ Niech $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

i-tą pochodną cząstkową funkcji f w punkcie $x \in U$ nazywamy wektor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)\right)$$

Przykład

$f(x,y,z) = (x^2y, z\sin(x+z))$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (2xy, z\cos(x+z))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x^2, 0) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (0, \sin(x+z) + z\cos(x+z))$$

Kolejna definicja

Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$.

Mówimy, że f ma w $x \in \mathcal{U}$ pochodną kierunkową względem (lub - w kierunku) wektora $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, jeżeli funkcja

$g : (-\delta, \delta) \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}^m$

$g(t) = f(x + tv)$

ma pochodną w $t = 0$

Jeżeli $\varepsilon > 0$ takie, by $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, to $\delta = \frac{\varepsilon}{\|v\|}$, wtedy $\forall_{t \in (-\delta, \delta)}\ x + tv \in B(x, \varepsilon)$.

(Uwaga: jeżeli $m > 1$, to $g(t) = (g_1(t), \dots, g_m(t))$; g ma pochodną w $t = 0 \Leftrightarrow g_1, \dots, g_m$ mają pochodne w $t = 0$).

Piszemy wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}.$$

(czasem używane są też oznaczenia

$D_v f(x)$, $f'_v(x)$ itp).

Jeżeli $e_i = (0,0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ta wsp.}}}{1},0,\dots,0)$ jest, dla $i=1,\dots,n$, bazą standardową w $\mathbb{R}^n$, to oczywiście

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

<u>Przykład</u>:

Niech $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Ustalmy $v=(v_1,v_2)$ i obliczmy, o ile istnieje, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(v_1,v_2)) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{hv_1 \cdot h^2 v_2^2}{h^2v_1^2 + h^4 v_2^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4}}_{=(*)} =$$

$$= \frac{v_2^2}{v_1}, \text{ o ile } v_1 \neq 0.$$

A jeżeli $v_1 = 0$? Wtedy, dla wszystkich $h \neq 0$, $(*) = 0$ (v_1 i v_2 nie mogą być równocześnie zero, bo $(v_1,v_2) \neq (0,0)$), więc również i granica jest zero.

Ostatecznie,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} v_2^2/v_1 & \text{gdy } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } v_1 = 0 \end{cases}$$

Wiemy już, że funkcja f NIE JEST ciągła w $(0,0)$. Pokazuje to, że nawet istnienie WSZYSTKICH pochodnych kierunkowych funkcji f w pewnym punkcie nie gwarantuje jej ciągłości w tym punkcie.

Nietrudno sprawdzić, że we wszystkich pozostałych punktach $\mathbb{R}^2$ funkcja f też ma wszystkie pochodne kierunkowe...

Wszystko to razem oznacza, że potrzebujemy lepszej definicji pochodnej funkcji wielu zmiennych.

Definicja: Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f: U \to \mathbb{R}^m$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w $x \in U$, jeżeli istnieje przekształcenie liniowe $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lim_{\mathbb{R}^n \ni h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - L \cdot h \|}{\|h\|} = 0$$

L nazywamy pochodną /różniczką/ różniczką zupełną f w x, ozn. $f'(x)$ lub $Df(x)$.

<u>Przypomnienie</u>: dla $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-a\cdot h}{h} = 0$$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w x oraz $a = f'(x)$.

<u>Twierdzenie</u>: funkcja $f : \mathcal{U} \overset{\text{otwarty}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $x \in \mathcal{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją:

•) przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

oraz ••) funkcja $r : \underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{U}_x}}{\{h \in \mathbb{R}^n : x+h \in \mathcal{U}\}} \to \mathbb{R}^m$

ciągła w $h=0$ i spełniająca $r(0)=0$

takie, że

$$\forall_{h \in \mathcal{U}_x} \quad f(x+h) = f(x) + L\cdot h + \|h\|\cdot r(h). \quad ☆$$

Wówczas też $L = Df(x)$.

<u>Dowód</u>

$\Longrightarrow$

wystarczy przyjąć $L = Df(x)$

$$r(h) := \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)-Df(x)}{h} & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$$

Z definicji pochodnej $\lim_{h\to 0} r(h) = 0 = r(0)$.

55

$\Leftarrow$

L jest równe $Df(x)$, gdyż

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-Lx\|}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|h\|\|}{\|h\|}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\|r(h)\| \overset{\text{z ciągłości } r.}{=} \|r(0)\|=0.$$

Zadanie: Wykazać, że pochodna funkcji w punkcie jest zdefiniowana jednoznacznie.

Rozwiązanie

Załóżmy, że dla pewnej $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $x\in\mathcal{U}$ zachodzi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-Ah\|}{\|h\|}=0$$

oraz

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-Bh\|}{\|h\|}=0$$

przy czym $A\neq B$. To ostatnie oznacza, że dla pewnego wektora e_i ($e_1,\dots,e_n$ – baza standardowa) mamy $(A-B)e_i\neq(0,\dots,0)=0$ (w p.p. ~~baza~~ macierz przekształcenia $A-B$ byłaby macierzą zerową).

Mamy $\lim_{h\to 0}\frac{\|(A-B)h\|}{\|h\|} \overset{\text{n.}\Delta.}{\le} \frac{\|f(x+h)-f(x)-Bh\|+\|f(x+h)-f(x)-Ah\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$

$0 \le$

(56)

Z drugiej strony, kładąc $h = te_i$, mamy

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\|(A-B)te_i\|}{\|te_i\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|\,\|(A-B)e_i\|}{|t|} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \|(A-B)e_i\| \neq 0$$

↯.

~~Obser~~ <u>Wniosek</u>: Niech $f: \mathcal{U} \overset{\subset \mathbb{R}^n}{\longrightarrow} \mathbb{R}^m$

Jeżeli f jest różniczkowalna w $x \in \mathcal{U}$, to dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x)\cdot v$$

<u>Dowód wniosku</u>:

$$Df(x)\cdot v = \frac{1}{t} Df(x)\cdot tv \overset{z\ \star}{=} \frac{f(x+tv) - f(x) - \|tv\|\cdot r(tv)}{t} =$$

$$= \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \frac{|t|}{t}\|v\|\,r(tv)$$

Skąd

$$\underbrace{\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}}_{\substack{\downarrow t\to 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(x)}} = \underbrace{Df(x)\cdot v + \overbrace{\frac{|t|}{t}}^{\text{ograniczone } (=\pm 1)} \overbrace{\|v\|}^{\text{stałe}} \overbrace{r(tv)}^{r(0)=0}}_{\substack{\downarrow t\to 0 \\ Df(x)\cdot v}}$$

(57)

Nietrudno zauważyć, że kryterium różniczkowalności f w x, które oznaczyliśmy ☆:

Istnieją $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ oraz $r : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}^m$ ciągłe w 0, $r(0)=0$

takie, że

$$f(x+h) = f(x) + L\cdot h + \|h\|\, r(h)$$

jest, dla $m=1$, równaniem, ale gdy $m>1$, a $f=(f_1,\dots,f_m)$, układem równań

$$f_1(x+h) = f_1(x) + (L\cdot h)_1 + \|h\|\, r_1(h)$$
$$f_2(x+h) = f_2(x) + (L\cdot h)_2 + \|h\|\, r_2(h)$$
$$\vdots$$
$$f_m(x+h) = f_m(x) + (L\cdot h)_m + \|h\|\, r_m(h)$$

Jeżeli $L=(a_{ij})$, to $(L\cdot h)_i = \langle a_{i,\cdot}, h\rangle = \langle L_i, h\rangle$ iloczyn skalarny i-tego wiersza macierzy (a_{ij}) z wektorem h,

w ten sposób widzimy, że $f=(f_1,\dots,f_m)$ jest różniczkowalna w $x\in\mathcal{U}$ $f: \mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji $f_i : \mathcal{U}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x;

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ Df_2(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{pmatrix}$$

A jak wyznaczyć wektor $Df_i(x)$, gdy $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$?

Dla (e_i) – bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$ –

mamy $Df(x) \cdot e_i = \langle Df(x), e_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Stąd $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$

<u>Wniosek</u> Jeżeli $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $x \in \mathcal{U}$,

to
$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

macierz Jacobiego funkcji f w x.

postać różniczki f w standardowych bazach w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Gdy $n = m$, macierz ta jest kwadratowa, jej wyznacznik nazywany jakobianem funkcji f w x

Wiemy już, że istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych, czy nawet kierunkowych, ~~nie~~ w pewnym punkcie nie gwarantuje ~~to~~ ciągłości funkcji f (a więc tym bardziej różniczkowalności).

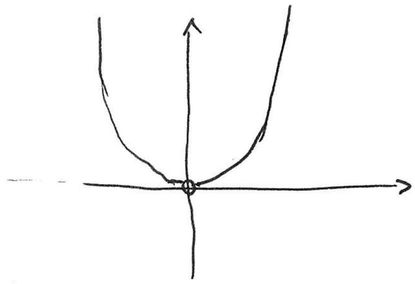
Zauważmy, że jeżeli f jest różniczkowalna w x, to $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x)\cdot v$, więc przekształcenie

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x)$$ jest liniowe.

Dla funkcji $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ przekształcenie to miało postać

$$v \longmapsto \begin{cases} v_2^2/v_1 & v_1\neq 0\\ 0 & v_1=0\end{cases}$$, nie było więc liniowe.

Niech jednak $f(x,y)=\begin{cases}1 & y=x^2,\ x\neq 0\\ 0 & y\neq x^2 \text{ lub } (x,y)=(0,0).\end{cases}$



f jest funkcją charakterystyczną paraboli $y=x^2$, bez punktu $(0,0)$.

Wówczas dla każdego v istnieje $\varepsilon>0$ t.ż. na odcinku $(-\varepsilon v, \varepsilon v)$ funkcja f jest stale równa zero. Stąd $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0$ dla każdego $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

$$v\longmapsto 0$$ jest doskonałą liniową funkcją.

Stąd również warunek, by funkcja przypisująca kierunkowi v pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ ~~nie~~ była liniowa nie wystarcza, by zagwarantować ciągłość f w x.

60

Jeszcze jeden, dość trywialny <u>wniosek</u>:

Jeżeli f jest różniczkowalna w x, to jest w x ciągła.

<u>Dowód wniosku</u>: $\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)-f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(Df(x)\cdot h + \|h\|\cdot r(h)\right)$

$$= Df(x)\cdot 0 + 0\cdot r(0) = 0.$$

Arytmetyczne własności różniczki

Liniowość $f,g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ różniczk. w $x \in U$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

Dowód: Trywialne ćwiczenie.

Wypisujemy kryterium różniczkowalności

dla f:

f różn. w x $\iff$ $f(x+h) - f(x) + Df(x)\cdot h + \|h\| r_1(h)$

to samo dla g; mnożymy jedną z równości przez α, drugą przez β, dodajemy i dostajemy kryterium różniczkowalności dla $\alpha f + \beta g$.

~~Pochodna iloczynu~~

~~Gdy $f,g: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, możemy na rozmaite sposoby mnożyć przez siebie f i g, np. skalarnie; Mnoż ABOT~~

Pochodna iloczynu

Niech $f: U \to \mathbb{R}^m$, $g: U \to \mathbb{R}^k$

będą różniczkowalne w $x \in U$.

W wielu sytuacjach możemy rozważać iloczyn f i g:

gdy $m=k$, mamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g\rangle \quad y \longmapsto \langle f(y), g(y)\rangle$$

gdy $k=m=6$, możemy interpretować $f(y)$ jako macierz 2×3, $g(y)$ jako macierz 3×2 i mnożyć je przez siebie ($f\cdot g$ lub $g\cdot f$)

gdy $m=k=3$ możemy brać iloczyn skalarny f i g lub ich iloczyn wektorowy...

Możliwości wiele, trudno dla każdej z nich oddzielnie dowodzić tw. o pochodnej iloczynu. Wszystkie mają jedną cechę wspólną: iloczyn jest operacją dwuliniową (tj liniową względem każdego z argumentów). Chcemy zatem zbadać, jak zachowuje się pochodna funkcji $B(f,g): U \longrightarrow \mathbb{R}^l$, gdzie $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest zadanym przekształceniem dwuliniowym.

Aby to zrobić, musimy przyjrzeć się bliżej takim przekształceniom

Lemat 1 Jeżeli $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest biliniowe, to jest ciągłe.

Dowód:

Dla ustalonego $y \in \mathbb{R}^k$ i $j = 1, 2, \dots, l$ funkcja

$x \longmapsto B_j(x,y)$ jest liniowa, zatem

$$B_j(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(y)\, x_i .$$

Z drugiej strony, dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$

$y \longmapsto B_j(x,y)$ też jest liniowa,

w szczególności $y \longmapsto B_j(e^i, y) = \alpha_{ij}(y)$ jest liniowa. Stąd $\alpha_{ij}(y) = \sum_{p=1}^{k} \beta_{ijp}\, y_p$.

Ostatecznie $B_j(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{k} \beta_{ijp} \cancel{y_q} x_i y_p$ $\star$

jest wielomianem stopnia 2, B jest więc ciągła na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$.

Lemat 2 Niech B jak poprzednio.
Istnieje stała $L \geq 0$ taka, że $\forall_{x,y \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k}$

$$\|B(x,y)\|_\ell \leq L \|x\|_m \|y\|_k .$$

Dowód: można wprost z wzoru ☆ i nier. Schwarza.
Można też tak:

~~Niech~~ Zauważmy, że zbiór

$$A = \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,1) \times \overline{B}_{\mathbb{R}^k}(0,1) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \text{ jest}$$

zwarty. Gdy bowiem weźmiemy ciąg (u^i, v^i) punktów A, to (u^i) jest ciągiem z $\overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,1) \Rightarrow$ możemy z (u^i) wybrać podciąg (u^{i_j}) zbieżny do $\tilde{u} \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(0,1)$;

~~z~~ ciąg (v^{i_j}) jest ciągiem z $\overline{B}_{\mathbb{R}^k}(0,1) \Rightarrow$

możemy wybrać podciąg $v^{i_{j_p}} \longrightarrow \tilde{v} \in \overline{B}_{\mathbb{R}^k}(0,1)$, wtedy $(u^{i_{j_p}}, v^{i_{j_p}})$ jest podciągiem (u^i, v^i) zbieżnym do $(\tilde{u}, \tilde{v})$.

65

Niech $L = \sup_{(x,y)\in A} \|B(x,y)\|_\ell$. Wtedy

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k} \quad \|B(x,y)\|_\ell = \|x\|_m \|y\|_k \left\|B\left(\frac{x}{\|x\|_m}, \frac{y}{\|y\|_k}\right)\right\|_\ell$$
$$\leq L\|x\|_m \|y\|_k$$

(tak samo dowodziliśmy, że jeżeli $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^\ell$ jest liniowe, to istnieje stała M t. że $\forall_{x\in\mathbb{R}^m} \|Tx\|_\ell \leq M\|x\|_\ell$ i najlepszą taką stałą jest $M=\sup_{h\in B_{\mathbb{R}^m}(0,1)} \|Th\|_\ell$, ~~ozna~~ nazywamy ją normą operatorową T i ozn. $|||T|||$).

Przykłady do twierdzenia

<u>Twierdzenie:</u> Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f: U \to \mathbb{R}^m$, $g: U \to \mathbb{R}^k$ niech będą różniczkowalne w $x \in U$; $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ niech będzie przekszt. dwuliniowym. Wówczas

$B(f,g): U \to \mathbb{R}^\ell$

~~B(f~~ $B(f,g)(y) = B(f(y), g(y))$

jest różniczkowalna w x i dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$DB(f,g)(x)h = B(Df(x)h, g(x)) + B(f(x), Dg(x)h)$$

(proszę zauważyć, że wyrażenie po prawej stronie rzeczywiście jest liniowe względem h).

Dowód

Z kryterium różniczkowalności wiemy, że dla h t.ż. $x+h\in U$

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)\cdot h + \|h\| r_1(h)$$

$$g(x+h) = g(x) + Df(x)\cdot h + \|h\| r_2(h).$$

Mamy zatem

$$B(f(x+h), g(x+h)) = B(f(x) + Df(x)h + \|h\| r_1(h),\; g(x) + Dg(x)h + \|h\| r_2(h))$$

$$= B(f(x), g(x)) + B(Df(x)h, g(x)) + B(f(x), Dg(x)\cdot h)$$

$$+ \underbrace{B(Df(x)h, Dg(x)h)}_{= S(h)}$$

$$\underbrace{+ \|h\| \left[B(r_1(h), g(x) + Dg(x)h + \|h\| r_2(h)) + B(f(x) + Df(x)\cdot h, r_2(h)) \right]}_{\|h\| R(h)}$$

Zauważmy, że pierwsze 2 wyrazy są takie, jak trzeba; musimy wykazać, że $S(h) + \|h\| R(h)$ jest postaci $\|h\|\cdot r(h)$, gdzie $r(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$

$$S(h) = B(Df(x)h, Dg(x)h) = \|h\| B(Df(x)\tfrac{h}{\|h\|}, Dg(x)h;$$

więc $r(h) = B(Df(x)\frac{h}{\|h\|}, Dg(x)h) + R(h)$.

$$\lim_{h\to 0} R(h) = \lim_{h\to 0}\Big(B(r_1(h), g(x)+Dg(x)h + \|h\| r_2(h))$$

$$+ \; B(f(x)+Df(x)h, r_2(h))\Big) =$$

$$= B(0, g(x)) + B(f(x), 0) = 0$$

(z ciągłości B, ciągłości r_1 i r_2 w $h=0$).

$$0 \leq \left\| B\left(Df(x)\frac{h}{\|h\|}, Dg(x)h\right)\right\| \leq$$

$$\leq L \left\|Df(x)\frac{h}{\|h\|}\right\| \cdot \|Dg(x)\cdot h\| \leq$$

$$\leq L \cdot |||Df(x)||| \cdot |||Dg(x)||| \cdot \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Stąd oba składniki $r(h)$ dążą przy $h\to 0$ do zera, cnd. $\square$.

Twierdzenie o pochodnej złożenia

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ będą otwarte,

$f : U \to \mathbb{R}^m$ różniczkowalna w $x \in U$,

$f(U) \subset V$, $g : V \to \mathbb{R}^k$ różniczkowalna w $f(x)$,

to $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna

w x i

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

złożenie przekształceń liniowych.

Dowód

Oznaczmy $y = f(x)$. Z różniczkowalności f i g mamy

$$f(x+u) = f(x) + Df(x)u + \|k\| r_1(\cancel{k}\, u)$$

$$g(y+v) = g(y) + Dg(y)v + \|v\| r_2(v)$$

gdzie u i v są tż

dla wszystkich u, v tż. $x + u \in U$, $y + v \in V$;

$$r_1(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0, \quad r_2(v) \xrightarrow[v \to 0]{} 0.$$

70)

$\cancel{g(f(x+u}$

$$(g\circ f)(x+u) = g(f(x+u)) = g\big(\overbrace{f(x)}^{y} + \overbrace{Df(x)u + \|u\| r_1(u)}^{v}\big) =$$

$$= g(f(x)) + Dg(f(x))\cdot\big(Df(x)\cdot u + \|u\| r_1(u)\big) +$$

$$+ \|Df(x)u + \|u\| r_1(u)\| \, r_2\big(Df(x)u + \|u\| r_1(u)\big)$$

$$= g(f(x) + \big(Dg(f(x))\circ Df(x)\big)u +$$

$$+ \|u\| Dg(f(x)) r_1(u)$$

$$+ \|u\| \left\| Df(x)\frac{u}{\|u\|} + r_1(u)\right\| r_2\big(Df(x)u + \|u\| r_1(u)\big)$$

Jeżeli więc położymy

$$r(u) = Dg(f(x)) r_1(u) + \left\| Df(x)\frac{u}{\|u\|} + r_1(u)\right\| r_2\big(Df(x)u + \|u\| r_1(u)\big),$$

to wystarczy wykazać, że $r(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$

$$Dg(f(x)) r_1(u) \xrightarrow[u\to 0]{} Dg(f(x))\, 0 = 0$$

$$r_2\big(Df(x)u + \|u\| r_1(u)\big) \xrightarrow[u\to 0]{} r_2(0) = 0$$

$$\left\| Df(x)\frac{u}{\|u\|} + r_1(u)\right\| \le \underbrace{|||Df(x)|||}_{\text{ograniczone}} + \underbrace{\|r_1(u)\|}_{\text{dąży do zera, więc też ograniczone dla małych } u.}$$

To dowodzi tezy.

$\square$

<u>Wniosek</u>: Macierz Jacobiego $g \circ f$ w punkcie x to iloczyn macierzy Jacobiego g w $f(x)$ i f w x.

Twierdzenie

Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $f : U \to \mathbb{R}^m$; $x \in U$ i dla pewnego $r > 0$ takiego, że $B(x,r) \subset U$ we wszystkich punktach kuli $B(x,r)$ istnieją wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f i co więcej są ciągłe w punkcie x.
Wówczas f jest różniczkowalna w x, a jej pochodna w standardowych bazach dana jest macierzą Jacobiego

(innymi słowy, dla dowolnego $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$Df(x)h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad)$$

73)

Dowód

$f(y)=(f_1(y),\dots,f_m(y))$

Wiemy już, że $f: U \to R^m$ jest różniczkowalna w x wtedy i tylko wtedy, gdy różniczkowalne są w x wszystkie jej funkcje współrzędne $f_1, f_2, \dots, f_m$,

a jej pochodna Df jest wówczas równa

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ Df_2(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{pmatrix}.$$

Stąd w dowodzie wystarczy ograniczyć się do przypadku $m=1$. (tj $f: U \to R$).

Niech $h: \|h\|<r$ (tak, by $x+h \in B(x,r)$).

Oznaczmy

$p^0 = x = (x_1,\dots,x_n)$, $p^1 = x + h_1 e^1 = (x_1+h_1, x_2,\dots,x_n)$,

$p^2 = p^1 + h_2 e^2 = (x_1+h_1, x_2+h_2, x_3,\dots,x_n)$

$p^k = p^{k-1} + h_k e^k = (x_1+h_1,\dots,x_k+h_k, x_{k+1},\dots,x_n)$

$p^n = (x_1+h_1,\dots,x_n+h_n) = x+h$.

Niech teraz $F^k(t) = f(p^{k-1}+te^k) =$ dla $k=1,2,\dots,n$

$= f(x_1+h_1, x_2+h_2,\dots,x_{k-1}+h_{k-1}, x_k+t, x_{k+1},\dots,x_n)$

Mamy $F^k: [0,h_k] \to R$, F^k jest ciągła, a na $(0,h_k)$ ~~jest~~ różniczkowalna.

Stosując do F^k tw. Lagrange'a mamy

$$F^k(h_k) - F^k(0) = h_k F_k'(\xi_k) \quad \text{dla pewnego } \xi_k \in (0, h_k)$$

$$F_k'(\xi_k) = \lim_{s \to 0} \frac{F_k(\xi_k + s) - F_k(\xi_k)}{s} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(p^{k-1} + \xi_k e^k + s e^k) - f(p^{k-1} + \xi_k e^k)}{s} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}(p^{k-1} + \xi_k e^k)$$

Oznaczmy, dla uproszczenia, $q^k = p^{k-1} + \xi_k e^k$.
Zauważmy, że wszystkie punkty $p^0, p^1, p^2, \dots, p^n$ oraz $q^1, q^2, \dots, q^n$ leżą w $B(x, \|h\|)$.

Mamy też tożsamość

$$F^{k+1}(0) = f(p^k) = f(p^{k-1} + h_k e^k) = F^k(h_k)$$

Stąd

$$f(x+h) - f(x) = f(p^n) - f(p^{n-1}) + f(p^{n-1}) - f(p^{n-2}) + \dots + f(p^2) - f(p^1) +$$
$$+ f(p^1) - f(p^0) = F^n(h_n) - F^n(0) + F^{n-1}(h_{n-1}) - F^{n-1}(0) + \dots$$
$$\dots + F^k(h_k) - F^k(0) + \dots + F^1(h_1) - F^1(0) =$$
$$= h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(q^n) + h_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(q^{n-1}) + \dots + h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(q^k) + \dots + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^1).$$
$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^i)$$

75)

Niech $A(h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Aby wykazać tezę twierdzenia, wystarczy udowodnić, że $A(h) = \|h\| \cdot R(h)$, gdzie $\lim_{h \to 0} R(h) = R(0) = 0$.

Mamy

$$|A(h)| = \left| \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^i) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| =$$

$$\cancel{\leq \sum_{i=1}^{n} |h_i| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|}$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(q^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \right| \cancel{\leq \left| h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}$$

nier. Schwarza (to wyżej to iloczyn skalarny h przez wektor o wsp. $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(q^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$)

$$\leq \|h\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(q^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|h\| \cdot \sqrt{n} \cdot \sup_{\substack{y \in \overline{B}(x,h) \\ i=1,\dots,n}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$$

Jeżeli więc $R(h) = \begin{cases} \frac{A(h)}{\|h\|}, & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$

to $|R(h)| \leq \sqrt{n} \sup_{\substack{y \in \overline{B}(x,h) \\ i=1,\dots,n}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \xrightarrow{h \to 0} 0$

bo funkcje $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są ciągłe w x.

$\square$