Kłopoty z ciągłością

Przyjrzyjmy się ~~trzem~~ czterem funkcjom, zdefiniowanym w bardzo podobny sposób:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

We wszystkich 4 przypadkach ciągłość funkcji poza $(x,y) = (0,0)$ nie budzi wątpliwości.

A w $(0,0)$?

- f_1 nie jest ciągła. Wprawdzie $\lim_{x\to 0} f_1(x,0) = \lim_{y\to 0} f_1(0,y) = 0 = f_1(0,0)$, ale $\lim_{x\to 0} f_1(x,x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2} \neq f_1(0,0)$.

31

- f_2 jest ciągła w $(0,0)$. Mamy bowiem dla $(x,y)\neq(0,0)$

dlaczego?

$$0\leq\left|f_2(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{2}xy\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{1}{2}|xy|$$

funkcja ~~|xy|~~ $(x,y)\longmapsto|xy|$ jest ciągła na $\mathbb{R}^2$ (jako złożenie funkcji ciągłych), więc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|xy| = |0\cdot 0| = 0$. Stąd również

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|f_2(x,y)\right| = 0.$$

- f_3 też jest ciągła w $(0,0)$, bo

$$0\leq\left|f_2(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^4)\,y^2}{x^2+y^4}\right| = |y^2| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

- A f_4 nie jest ciągła:

wprawdzie

$$f_4(x,0) = 0 = f_4(0,y)\quad\text{, więc}\quad \lim_{x\to 0}f_4(x,0)=0$$

$$\lim_{y\to 0}f_4(0,x)=0$$

Również na dowolnej prostej przechodzącej przez ~~zero~~ $(0,0)$: $y=\lambda x$

$$\left|f_4(x,\lambda x)\right| = \left|\frac{x\cdot\lambda^2x^2}{x^2+\lambda^4x^4}\right| = \left|\frac{\lambda^2x}{1+\lambda^4x^2}\right| \leq \lambda^2|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Ale ~~$f_4(x,x^2)\leq x$~~ $f_4(y^2,y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f_4(0,0)\ldots$

<u>Def</u> Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem <u>niespójnym</u>, jeżeli istnieją zbiory otwarte $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

- $A \subset \mathcal{U} \cup V$
- $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$
- $A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$

Zbiór A jest <u>spójny</u> jeżeli nie jest niespójny

<u>Przykład</u>: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ odcinek $[x,y]$ jest zbiorem spójnym

<u>Dowód</u>

Przypomnijmy, że $[x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$

Załóżmy że $[x,y]$ nie jest spójny, a więc że istnieją $\mathcal{U}$ i V otwarte spełniające

$[x,y] \subset \mathcal{U} \cup V$, $[x,y] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq [x,y] \cap V$, $[x,y] \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \in \mathcal{U}$.

Zbiór $\mathcal{U}$ jest otwarty, więc wraz z x w $\mathcal{U}$ leżą również wszystkie punkty dostatecznie bliskie x: istnieje $\varepsilon > 0$ t.ż. $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

Twierdzenie

Jeżeli $A, B \subset \mathbb{R}^n$ są spójne i $A \cap B \neq \emptyset$, to $A \cup B$ też jest spójny.

Dowód

Załóżmy przeciwnie: mamy $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ tż

$$\mathcal{U} \cap (A \cup B) \neq \emptyset, \quad V \cap (A \cup B) \neq \emptyset, \quad A \cup B \subset \mathcal{U} \cup V,$$

$$\mathcal{U} \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset.$$

Niech $x \in A \cap B$. Możemy bez straty ogólności założyć, że $x \in \mathcal{U}$, wtedy wiemy, że $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Oczywiście $A \subset A \cup B \subset \mathcal{U} \cup V$

~~A~~ $A \cap \mathcal{U} \cap V \subset (A \cup B) \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$,

więc —"— $= \emptyset$,

gdyby $A \cap V \neq \emptyset$, to A byłby niespójny, więc $A \cap V = \emptyset$.

Tak samo $x \in B \cap \mathcal{U}$, B jest spójny $\Rightarrow B \cap V = \emptyset$

Stąd $(A \cup B) \cap V = \emptyset$ ← sprzeczność.

$\square$.

Wniosek

Łamane są spójne.

Stąd dla $t \in [\sigma, \sigma + \frac{\varepsilon_1}{\|x-y\|})$ punkty $z(t)$ leżą w $B(z(\sigma), \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}$, co oznacza, że $(0, \sigma + \frac{\varepsilon_1}{\|x-y\|}) \subset S$. To jednak jest sprzeczne z $\sigma = \sup S$.

② $\sigma \notin S$, a więc w szczególności $z(\sigma) \notin \mathcal{U}$ (dlaczego?). Wtedy $z(\sigma) \in V$. Ten zbiór jest jednak otwarty – punkty bliskie $z(\sigma)$ też należą do V. W szczególności punkty postaci $z(t)$ z $t < \sigma$, ale t bliskim σ należą do V: istnieje $\delta > 0$ tż $\forall_{t \in (\sigma-\delta, \sigma)}$ $z(t) \in V$. Wtedy jednak dla $t \in (\sigma-\delta, \sigma)$ $z(t) \notin \mathcal{U}$, więc żadne $t \in (\sigma - \delta, \sigma)$ nie należy do S. Wtedy σ nie może być $\sup S$.

(35)

Oznaczmy $z(t) = (1-t)x + ty$ i niech
$S = \{ s \in (0,1] : [x, z(s)] \subset \mathcal{U} \}$.

Zbiór S jest niepusty, bo dla małych $t \in (0,1]$ punkty postaci $z(t)$ są bliskie x, więc leżą w $B(x, \varepsilon)$. W $B(x,\varepsilon)$ leży więc też cały odcinek $[x, z(s)]$, o ile s jest dodatnie i dostatecznie małe.

Niech $\sigma = \sup S$.

Albo ① $\sigma \in S$, albo ② $\sigma \notin S$

① •) jeżeli $\sigma = 1$, to $z(\sigma) = z(1) = y$,
więc skoro $\sigma \in S$, to $[x,y] \subset \mathcal{U}$.
Wtedy jednak $\emptyset = [x,y] \cap \mathcal{U} \cap V = [x,y] \cap V$

Sprzeczność, bo $[x,y] \cap V$ miało być niepuste.

••) jeżeli $\sigma < 1$, to przyjrzyjmy się punktowi $z(\sigma)$. Odcinek $[x, z(\sigma)] \subset \mathcal{U}$, więc w szczególności $z(\sigma) \subset \mathcal{U}$. Zbiór $\mathcal{U}$ jest otwarty, istnieje więc $\varepsilon_1 > 0$ tż $B(z(\sigma), \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}$.
Jeżeli teraz $t > \sigma$, ale t jest bliskie σ, to punkty postaci $z(t)$ leżą blisko $z(\sigma)$:

$$\|z(\sigma) - z(t)\| = \|(1-\sigma)x + \sigma y - (1-t)x - ty\| =$$
$$= |\sigma - t| \, \|x-y\| = (t-\sigma)\|x-y\|.$$

Twierdzenie: Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem spójnym, a $f: A \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła, to $f(A)$ jest spójny.

Nim udowodnimy to twierdzenie, wykażemy najpierw ważny lemat, którego szczególny przypadek (gdy $\mathcal{U}$ jest zbiorem otwartym) wykazaliśmy już wcześniej:

Lemat: Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ ciągła. Dla każdego otwartego $A \subset \mathbb{R}^m$ istnieje zbiór otwarty $B \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $f^{-1}(A) = \mathcal{U} \cap B$.

Dowód: (powtarzamy część dowodu szczególnego przypadku):

Niech $x \in f^{-1}(A)$. Wówczas $f(x) \in A$, zbiór A jest otwarty, więc istnieje $\varepsilon_x > 0$ t.ż. $B(f(x), \varepsilon_x) \subset A$.

f jest ciągła w x, więc istnieje $\delta_x > 0$ t.ż.

$$\forall_{y \in \mathcal{U}} \quad \underbrace{\|y - x\| < \delta_x}_{y \in B(x, \delta_x)} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \underbrace{\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon_x}_{\Downarrow}$$

$$f(y) \in B(f(x), \varepsilon_x) \subset A$$

A więc dla każdego $y \in \mathcal{U} \cap B(x, \delta_x)$ spełniony jest poprzednik $(*)$, a więc i następnik $(*)$, skąd $f(y) \in A$, równoważnie $y \in f^{-1}(A)$.

(37) Biorąc $B = \bigcup_{x\in f^{-1}(A)} B(x,\delta_x)$ otrzymujemy zbiór otwarty, oczywiście $f^{-1}(A) \subset B$, ale też, z naszych rozważań wynika że

$\forall_{x\in f^{-1}(A)} B(x,\delta_x) \subset f^{-1}(A)$, więc również $B \subset f^{-1}(A)$.

Stąd $B = f^{-1}(A)$. $\square$

<u>Dowód twierdzenia</u>

Załóżmy przeciwnie: że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest spójny, $f: A \to \mathbb{R}^m$ ciągła, ale $f(A)$ nie jest spójny.

Wówczas istnieją otwarte $\mathcal{U}$ i $V \subset \mathbb{R}^m$ takie, że $f(A) \subset \mathcal{U} \cup V$, $f(A)\cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq f(A)\cap V$, ale $f(A)\cap\mathcal{U}\cap V = \emptyset$.

Z lematu wiemy, że istnieją zbiory otwarte $\tilde{\mathcal{U}}$ i $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = A \cap \tilde{\mathcal{U}}$$
$$f^{-1}(V) = A\cap \tilde{V}.$$

tak naprawdę tu jest równość

Wiemy, że $f(A)\subset \mathcal{U}\cup V$, więc $A \subset f^{-1}(\mathcal{U}\cup V) =$
$$= f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(V)$$
$$= (A\cap\tilde{\mathcal{U}}) \cup (A \cap \tilde{V}) \subset \tilde{\mathcal{U}} \cup \tilde{V}.$$

Jeżeli $y \in f(A)\cap\mathcal{U}$, to istnieje $x\in A$ t.ż. $f(x) = y$ i $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$

Stąd $A\cap\tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Analogicznie $A\cap\tilde{V}\neq\emptyset$. $A\cap\tilde{\mathcal{U}}$

Na koniec, gdyby $A\cap\tilde{\mathcal{U}}\cap\tilde{V}$ było niepuste, tj istniałoby $z \in A\cap\tilde{\mathcal{U}}\cap\tilde{V}$, to $f(z) \in f(A\cap\tilde{\mathcal{U}}\cap\tilde{V}) \subset f(A)\cap f(\tilde{\mathcal{U}})\cap f(\tilde{V}) = \emptyset \leftarrow$ sprzeczność

Twierdzenie: Jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in A \subset \mathbb{R}^n$ istnieje podzbiór $B \subset A$ taki, że B jest spójny i x oraz y należą do B, to A też jest spójny

Dowód: Załóżmy przeciwnie: że A ma własność opisaną w twierdzeniu, ale nie jest spójny, a więc istnieją otwarte $\mathcal{U}$ i $V \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq A \cap V, \quad A \subset \mathcal{U} \cup V \quad i \quad A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset.$$

Niech wówczas $x \in A \cap \mathcal{U}$, $y \in A \cap V$. Z założeń twierdzenia istnieje $B \subset A$, B spójny, taki, że x i y należą do B. Zauważmy jednak, że

$\cdot$) $x \in A \cap \mathcal{U} \wedge x \in B \Rightarrow x \in \underbrace{A \cap B}_{\overset{\shortparallel}{B},\ \text{bo } B \subset A} \cap \mathcal{U} = B \cap \mathcal{U}$, więc $B \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

$\cdot\cdot$) $y \in A \cap V \wedge y \in B \Rightarrow y \in B \cap V \Rightarrow B \cap V \neq \emptyset$

$\cdot\cdot\cdot$) $B \subset A \subset \mathcal{U} \cup V$

$::$) $B \cap \mathcal{U} \cap V \subset A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$, więc $B \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

To dowodzi, że B nie jest spójny, wbrew założeniu.

Wniosek: Jeżeli dowolne 2 punkty zbioru można połączyć łamaną, to jest on spójny

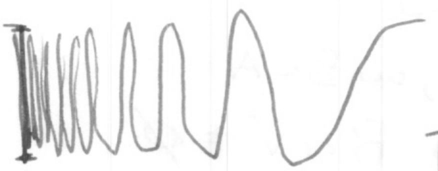
Uwaga: Przypomnijmy, że krzywa w $\mathbb{R}^n$ to obraz odcinka (ew. półprostej lub całej prostej) w przekształceniu ciągłym (a dokładniej - to owe przekształcenie wraz z obrazem).

39

Taka definicja jest źródłem kłopotów – są ciągłe przekształcenia z $[0,1]$ NA kwadrat w $\mathbb{R}^n$ (tzw. krzywe Peano), ale na razie nam wystarczy. Z twierdzenia o spójności obrazu zbioru spójnego wiemy, że każda krzywa jest zbiorem spójnym. Stąd

<u>Wniosek 2</u>: Jeżeli każde 2 punkty zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ można połączyć krzywą, to A jest spójny.

Zbiory o własności z Wniosku 2 nazywamy łukowo spójnymi. Nie wszystkie zbiory spójne są łukowo spójne, <u>przykład</u>:



wykres $\sin\frac{1}{x}$ wraz z odcinkiem $I = [(0,1),(0,-1)]$ jest spójny, choć punktów z I z punktami wykresu $\sin\frac{1}{x}$ nie da się połączyć żadną krzywą (ani tym bardziej łamaną).

Jeżeli jednak A jest otwarty, to

<u>Twierdzenie</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ otwarty jest spójny $\Leftrightarrow$ każde 2 punkty A można połączyć łamaną.

Szkic dowodu

$\Leftarrow$ już mamy, pozostaje $\Rightarrow$

Niech $\mathcal{U}_x = \{y \in A : x$ można połączyć łamaną z $y\}$

$\mathcal{U}_x$ jest
- niepusty (bo $x \in \mathcal{U}_x$)
- otwarty.

Dlaczego? Niech $y \in \mathcal{U}_x$. Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $B(y,\varepsilon) \subset A$. Każdy ~~od~~ punkt z kuli $B(y,\varepsilon)$ można połączyć odcinkiem z y i odcinek ten cały leży w $B(y,\varepsilon)$, a więc w A. Łącząc x łamaną z y i doklejając do niej odcinek $[y,z]$ dostajemy łamaną łączącą x z z. Stąd $B(y,\varepsilon) \subset \mathcal{U}_x$.

Wybieramy $x_0 \in A$ i niech $\mathcal{R}_1 = \{x \in A : \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_{x_0} \neq \emptyset\}$
$\mathcal{R}_2 = \{x \in A : \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_{x_0} = \emptyset\}$.

Niech teraz $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{R}_1} \mathcal{U}_x$, $V = \bigcup_{x \in \mathcal{R}_2} \mathcal{U}_x$.

Zbiory $\mathcal{U}$ i V są otwarte. Wykażemy, że są rozłączne. Załóżmy bowiem, że $z \in \mathcal{U} \cap V$. Wtedy istnieją $x \in \mathcal{R}_1$ i $y \in \mathcal{R}_2$ takie, że $z \in \mathcal{U}_x$ i $z \in \mathcal{U}_y$

$x \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow$ istnieje łamana łącząca x_0 z x
$z \in \mathcal{U}_x \Rightarrow$ ——— " ——— x z z
$z \in \mathcal{U}_y \Rightarrow$ ——— " ——— z z y

Łącząc je dostajemy łamaną łączącą x_0 z y, co ~~[illegible]~~

(41)

oznacza że $y \in \mathcal{U}_{x_0}$. To jest sprzeczne z $y \in R_1$, bo $y \in \mathcal{U}_{x_0} \cap \mathcal{U}_y$.

Oczywiście $\forall_{x \in A}\ x \in \mathcal{U}_x^{\subset A}$, więc $A \subset \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x^{\subset A} =$

$$= \bigcup_{x \in R_1} \mathcal{U}_x \cup \bigcup_{x \in R_2} \mathcal{U}_x = U \cup V \subset A$$

Jeżeli więc A jest spójny, to któryś ze zbiorów $\mathcal{U}$ lub V musi być pusty.

$\mathcal{U}$ nie jest pusty, bo $x_0 \in \mathcal{U}_{x_0}$, $\mathcal{U}_{x_0} \cap \mathcal{U}_{x_0} \neq \emptyset$ czyli $x_0 \in R_1 \Rightarrow x_0 \in \mathcal{U}$. Stąd V jest pusty i $\mathcal{U} = A$. To znaczy, że $\forall_{y \in A}\ \mathcal{U}_y \cap \mathcal{U}_{x_0} \neq \emptyset$.

Niech ~~$z \in \mathcal{U}_y \cap \mathcal{U}_{x_0}$~~ $x, y \in A$.

~~x_0 zna~~ $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_{x_0} \neq \emptyset$ $\Leftarrow$ niech $z \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_{x_0}$

$\mathcal{U}_y \cap \mathcal{U}_{x_0} \neq \emptyset$ $\Leftarrow$ niech $w \in \mathcal{U}_y \cap \mathcal{U}_{x_0}$.

$z \in \mathcal{U}_x \Rightarrow$ istnieje łamana łącząca x z z

$z \in \mathcal{U}_{x_0} \Rightarrow$ ——— " ——— z z x_0

$w \in \mathcal{U}_{x_0} \Rightarrow$ ——— " ——— x_0 z w

$w \in \mathcal{U}_y \Rightarrow$ ——— " ——— w z y

łącząc je dostajemy łamaną łączącą x z y.

$\square$.

Spójne podzbiory $\mathbb{R}$

Wykażemy, że jedynymi spójnymi podzbiorami $\mathbb{R}$ są

1) zbiory jednopunktowe
2) przedziały (odcinki otwarte, domknięte, otw-domkn. półproste otw. i domknięte i cała prosta)

Zbiór jednopunktowy jest spójny (dość trywialne ćwiczenie).

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem spójnym, który zawiera co najmniej 2 różne punkty.

Niech $x, y \in A$, $x < y$.

<u>Obserwacja</u>: wówczas $[x,y] \subset A$.

Gdyby bowiem pewien punkt $z \in [x,y]$ nie należał do A, to oczywiście $z \neq x$ i $z \neq y$ (te leżą w A). Wtedy $\mathcal{U} = (-\infty, z)$ i $V = (z, \infty)$ rozdzielają zbiór A (tj. dowodzą, że A nie jest spójny):

$\mathcal{U} \cap V \cap A = \emptyset$ (bo $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$),

$x \in \mathcal{U} \cap A$, więc $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$

$y \in V \cap A$, więc $V \cap A \neq \emptyset$

$A \subset \mathbb{R} \setminus \{z\} = \mathcal{U} \cup V$.

Niech teraz $\alpha = \inf A \in [-\infty, \infty)$

$\beta = \sup A \in (-\infty, +\infty]$. ~~Oczywiście~~

Jeżeli α i β należą do A, to $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$[\alpha, \beta] \underset{\text{z Obserwacji}}{\subset} A \underset{\text{bo } A \text{ jest pomiędzy swoim infimum a supremum}}{\subset} [\alpha, \beta]$$

więc $A = [\alpha, \beta]$.

Jeżeli $\alpha, \beta \notin A$, to istnieją ciągi

(x_n) malejący t.ż. $\forall_n\, x_n \in A$, $x_n \to \alpha$

(y_n) rosnący , $\forall_n\, y_n \in A$, $y_n \to \beta$.

$$\Downarrow \text{Obserwacja}$$

$$\forall_n\, [x_n, y_n] \subset A$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] = (\alpha, \beta) \subset A$$

ale $A \subset (\alpha, \beta)$ (leży między inf a sup, a te nie należą do A).

Stąd $A = (\alpha, \beta)$.

Przypadki, gdy $\alpha \in A$, $\beta \notin A$ $(\Rightarrow A = [\alpha, \beta))$
i $\alpha \notin A$, $\beta \in A$ $(\Rightarrow A = (\alpha, \beta])$
zostawiam czytelnikom.

__Wniosek__: Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie spójny, $f: A \to \mathbb{R}$ ciągła. Wówczas albo f jest stała, albo $f(A)$ jest przedziałem.

__Wniosek__ (własność Darboux)
Niech ~~f~~ $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie spójny, $f: A \to \mathbb{R}$ ciągła. Jeżeli dla pewnych $x, y \in A$ i $c \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) < c < f(y)$, to istnieje $z \in A$ takie, że $f(z) = c$.

__Dowód__: ~~f(x)~~ $f(A)$ jest spójny i zawiera $f(x)$ i $f(y)$, więc z Obserwacji $[f(x), f(y)] \subset f(A)$.

$$c \in [f(x), f(y)] \Rightarrow c \in f(A) \Rightarrow \exists_{z \in A} f(z) = c. \qquad \square$$

Z ważnych własności funkcji ciągłych pozostała nam jeszcze ciągłość funkcji odwrotnych. Jeszcze w zeszłym roku udowodniliśmy

Twierdzenie Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, $f: K \to \mathbb{R}^m$ niech będzie ciągła i różnowartościowa. Wówczas funkcja $f^{-1}: f(K) \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła.

Przypomnijmy pokrótce dowód.

Załóżmy, że f spełnia założenia twierdzenia, ale f^{-1} nie jest ciągła, a więc

$$\sim \left(\forall_{z \in f(K)} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{w \in f(K)} \|z - w\| < \delta \Rightarrow \|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)\| < \varepsilon \right)$$

a więc $\exists_{z \in f(K)} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{w \in f(K)} \|z - w\| < \delta \wedge \|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)\| \geq \varepsilon.$

Niech $x = f^{-1}(z)$, $y = f^{-1}(w)$. f jest bijekcją między K a $f(K)$, więc kwantyfikator $\exists_{z \in f(K)}$ możemy zastąpić $\exists_{x \in K}$ itd.

$$\exists_{x \in K} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{y \in K} \|f(x) - f(y)\| < \delta \wedge \|x - y\| \geq \varepsilon.$$

Niech teraz $\delta = \frac{1}{n}$, odpowiadający tej δ punkt y oznaczmy y_n:
$$\exists_{x \in K} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{y_n \in K} \|f(x) - f(y_n)\| < \frac{1}{n} \wedge \|x - y_n\| \geq \varepsilon.$$

Z ciągu (y_n) możemy, dzięki zwartości K, wybrać podciąg (y_{n_k}) zbieżny do jakiegoś $\tilde{y}$.

Skoro $\forall_n \; \|x-y_n\| \geq \varepsilon$, to $\|x-\tilde{y}\| \geq 0$, w szczególności $x \neq \tilde{y}$. Z drugiej strony $\|f(x)-f(y_{n_l})\| < \frac{1}{n_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$, więc $f(\tilde{y}) = f(x)$. To przeczy różnowartościowości funkcji f.

□.

A co, gdy ~~A~~ zbiór K nie jest zwarty?

Rozważmy funkcję $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$

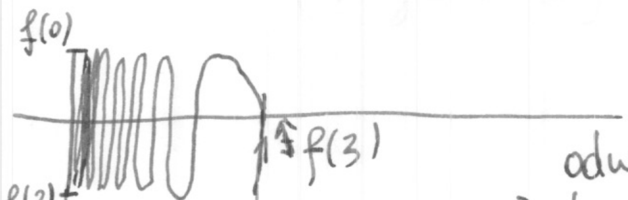
f przekształca odcinek $[0,2]$ w odcinek $[(0,1),(0,-1)]$, przez jednokładność

półprosta ~~odcinek~~ $[3,\infty)$ nawija na wykres funkcji $\sin\frac{\pi}{x}$

$$t\in[3,\infty) \longmapsto \left(\frac{1}{t-2}, \sin\pi(t-2)\right)$$

a z przedziału $[2,3]$ robi łuk łączący końce:

$\downarrow$



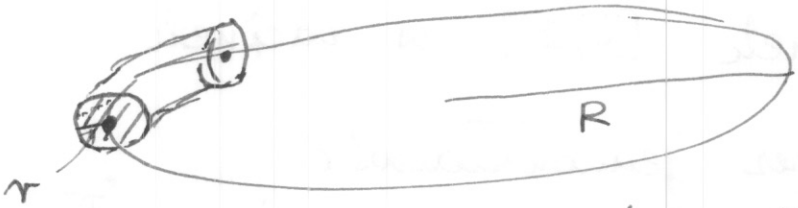
Gołym okiem widać, że jest to funkcja ciągła i różnowartościowa, ale odwrotna do niej nie jest ciągła w żadnym punkcie odcinka $[(0,1),(0,-1)] = f([0,2])$

Inny ważny przykład: owijka na torusie:
lub obmotka

Dla niewymiernego $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja ~~g(t)~~
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dana wzorem

$$g(t) = \big((R + r\cos(\alpha\pi t))\cos t,\ (R + r\cos(\alpha\pi t))\sin t,\ r\sin(\alpha\pi t)\big)$$

jest różnowartościowa, jej obraz leży na torusie powstałym przez obrót okręgu o promieniu r po okręgu o promieniu R



i wprawdzie nie jest równy powierzchni torusa, ale jest w niej gęsty: nawijany na powierzchnię torusa nieskończoną nitkę. Ładne rysunki znajdą Państwo w skrypcie prof. Streleckiego.

Funkcja odwrotna do g nie jest ciągła w żadnym punkcie obrazu (dlaczego?)

(47)

Takie dziwne przykłady nie mogą ~~zaś~~ mieć miejsca, gdy wymiary dziedziny i przeciwdziedziny są równe, a ta pierwsza jest zbiorem otwartym. Zachodzi bowiem (znacznie wykraczające poza zakres naszego wykładu)

Twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru:

<u>Jeżeli</u> $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty i $f: U \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i różnowartościowa, to $f(U)$ jest zbiorem otwartym, a $f^{-1}: f(U) \to \mathbb{R}^n$ też jest ciągła.