Analiza Matematyczna II. 1

Zasady zaliczania

Ćwiczenia 30 p

2 kolokwia (18 XI,)

każde po 50 p razem 100 p

egzamin 70 p

---

w sumie 200 p.

Prócz egzaminu pisemnego istotną część Państwa zaproszę na egzamin ustny

Literatura

skrypty Pawła Streleckiego (www.mimuw.edu.pl\~pawelst)
i Michała Krycha (—— " ——\~krych)

podręczniki Andrzeja Birkholca
Analiza matematyczna
Funkcje wielu zmiennych
Grigorija Michajłowicza Fichtenholza
Rachunek Różniczkowy i Całkowy

zbiory zadań Demidowicz
zadania w skrypcie Krycha
i książce Birkholca
trochę ponad 100 zadań w dawnej Jawnej Puli (na stronach P. Streleckiego)

② Ważne i pożyteczne, choć nie całkiem przystające do materiału wykładu książki:

Krzysztof Maurin   Elementy

Walter Rudin   – Podstawy Analizy Matematycznej

  – Analiza rzeczywista i zespolona

i wiele innych ...

W tym roku będziemy zajmować się głównie analizą funkcji wielu zmiennych rzeczywistych.

Po co nam wiele zmiennych?

- 2 lub 3 — w miarę jasne, opisujemy nich punktu na płaszczyźnie (statku na morzu) lub w przestrzeni trójwymiarowej (ptaka w powietrzu)

Po co więcej?

- przestrzeń fazowa: często, by opisać ruch ~~cząstki~~ obiektu (w 3 wymiarach) pamiętamy 6 danych: położenie (3 współrzędne) i prędkość (kolejne 3). Oczywiście znając trajektorię ~~cz~~ ciała możemy wyznaczyć jego prędkość, więc nie są to dane niezależne, ale z różnych względów opis tego ruchu w 6 wymiarach zamiast w 3 jest pożyteczny.

- Opis układu kilku ciał: dla dwóch ciał to już 6 współrzędnych opisujących ich położenie, dla 3 – 9 współrzędnych...

- czasoprzestrzeń to już 4 wymiary
- są inne, wyżej wymiarowe opisy (teorie) fizyczne – np. teoria strun.

Jak wspomniałem, będziemy badać funkcje określone na podzbiorach przestrzeni n-wymiarowej, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Istotna część ~~d~~ naszych rozważań daje się, przy niewielkich zmianach i uzupełnieniach, zaadaptować do przypadku $n = \infty$, ale my zostawimy to na wykład Analizy Funkcjonalnej. Zainteresowanych tak rozwijaną analizą odsyłam do książki K. Maurina.

⑤

<u>Definicja</u> n-wymiarową przestrzenią kartezjańską nazywamy n-krotny iloczyn kartezjański $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}}$$

Jeżeli $x \in \mathbb{R}^n$, to $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

punkt / wektor w $\mathbb{R}^n$

współrzędne punktu x

$x_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$

<u>Trochę przypomnienia z GALu</u>

Funkcję dwuliniową $P: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy (rzeczywistym) <u>iloczynem skalarnym</u>, jeżeli jest:

a) symetryczna: $P(x,y) = P(y,x)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n$

oraz

b) dodatnio określona: jeżeli $x \neq 0$ $(= (0,0,\ldots,0))$, to $P(x,x) > 0$.

<u>Kluczowy przykład</u>: Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

<u>Zadanie</u>: Z każdym iloczynem skalarnym P w $\mathbb{R}^n$ można związać macierz $A_P \in M^{n \times n}$ symetryczną i dodatnio określoną (tj. mającą wszystkie wartości własne > 0) taką, że $P(x,y) = \langle Ax, y \rangle$

6

Definicja: Normą euklidesową w $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $\|\cdot\|$:

$$\mathbb{R}^n \ni x \xmapsto{\|\cdot\|} \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \in [0,\infty)$$

(to oczywiście odległość - euklidesowa - ~~od~~ punktu x od początku układu współrzędnych)

Własności normy euklidesowej:

(I) (dodatnia jednorodność)

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}^n}\quad \underset{\substack{\| \\ (tx_1,tx_2,\dots,tx_n)}}{\|t\cdot x\|} = |t|\,\|x\|$$

(II) (nierówność trójkąta)

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n}\quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

(III) (norma jest niezdegenerowana)

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\quad \|x\|=0 \iff x=0\in\mathbb{R}^n$$

(czyli $x=(0,0,\dots,0)$)

(IV) nierówność Schwarza

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n}\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$$

7

Dowód własności I i III jest oczywisty.

IV: Nierówność Schwarza

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

zauważmy, że to znana nam z zeszłego roku nierówność Höldera, z $p=q=2$.

Dowód nier. Schwarza

Rozważmy funkcję $t \xmapsto{f} \|x+ty\|^2$

(dla ustalonych $x,y \in \mathbb{R}^n$).

$$f(t) = \|x+ty\|^2 = \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle t^2$$
$$= \|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \cdot t^2$$

widać, że f jest funkcją kwadratową.

Co więcej, f przyjmuje tylko wartości nieujemne.

Stąd wyróżnik f musi być ≤ 0:

$$\Delta = (2\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$$
$$\Updownarrow$$
$$4\langle x,y\rangle^2 \le 4\|x\|^2\|y\|^2$$
$$\Updownarrow$$
$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| .$$

(II): Nierówność trójkąta

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, czyli $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$

To również znana nam nierówność – nierówność Minkowskiego

Łatwo wynika ona z nier. Schwarza

ur. w Hermsdorf, dziś - Jerzmanowa k. Głogowa
Karl Hermann Amandus Schwarz 1843-1921 student Kummera i Weierstrassa, profesor w Halle, Zurichu i Getyndze. Analiza zespolona, rachunek wariacyjny

$$\|x+y\| \overset{?}{\le} \|x\|+\|y\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\|x+y\|^2 \overset{?}{\le} (\|x\|+\|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = P$$

$$\langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = L$$

$L \le P$ na mocy nierówności Schwarza

Uwaga: Każdą funkcję $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ spełniającą warunki (I)–(III) nazywamy normą. Inne przykłady norm:

- jeżeli $\mathbb{P}$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$, to $\|x\|_{\mathbb{P}} = \sqrt{\mathbb{P}(x,x)}$ jest normą
- p-norma: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$ $\quad p\in[1,\infty)$

Czy istnieje, dla $p\ne 2$, iloczyn skalarny $\mathbb{P}_p$ taki, że $\|x\|_p = (\mathbb{P}_p(x,x))^{1/2}$?

Elementy topologii przestrzeni euklidesowej

__Kulą otwartą__ o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i promieniu $r \in (0,\infty)$ nazywamy zbiór $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| < r\}$

Analogicznie __kula domknięta__ o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i promieniu $r \in (0,\infty)$ to $\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \leq r\}$

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest __otwarty__, jeżeli wraz z każdym swoim punktem x zawiera również pewną kulę otwartą o środku w x:

$$\forall_{x \in A} \ \exists_{r_x > 0} \ B(x, r_x) \subset A$$

__Przykłady__

- zbiór pusty jest otwarty
- $\mathbb{R}^n$ jest otwarta
- kula otwarta jest otwarta:

Niech $y \in B(x,r)$. Weźmy $r_y = \overbrace{r - \|y-x\|}^{\text{to jest } >0, \text{ bo } \|y-x\| < r}$,

Wtedy jeżeli $z \in B(y, r_y)$, to

$$\|z-x\| = \|z-y+y-x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| < r_y + \|y-x\|$$
$$= r - \|y-x\| + \|y-x\| = r, \text{ a więc } z \in B(x,r).$$

To oznacza, że $B(y, r_y) \subset B(x,r)$.

- dopełnienie punktu jest otwarte
  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$

Niech bowiem $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$; weźmy $r_z = \|z-x_0\|$.

Wtedy jeżeli $x \in B(z, r_z)$, to

$$\cancel{\|x-x_0\|}\, r_z = \|z-x_0\| = \|z-x+x-x_0\| \leq \|z-x\| + \|x-x_0\|$$
$$< r_z + \|x-x_0\| .$$

Stąd $\|x-x_0\| > 0$, a więc $x \neq x_0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

Tym samym wykazaliśmy, że $\forall_{z \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}} \; B(z, r_z) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

- Niemal identycznie dowodzi się, że dopełnienie kuli domkniętej: $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x, r)$
  jest otwarte, zostawiam to jako zadanie.

Twierdzenie

a) suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

b) część wspólna skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

Uwaga do punktu b): $\{\overset{(0,0,\dots,0)}{0}\}$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$, choć $\{0\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B(0, \frac{1}{i})$, więc część wspólna nieskończenie wielu zbiorów otwartych ~~jest zbiorem otwartym~~ niekoniecznie jest zbiorem otwartym.

Dowód: a) Niech $\{A_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną zbiorów otwartych i niech $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

To znaczy że dla pewnego $j \in I$ $x \in A_j$, a że A_j jest otwarty, to istnieje $r_x > 0$ takie, że $B(x, r_x) \subset A_j$; z kolei $A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, więc

$$B(x, r_x) \subset \bigcup_{i \in I} A_i .$$

b) Niech $A_1, A_2, \dots, A_m$ będą zbiorami otwartymi i niech $z \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$.

To znaczy, że $\forall_{i \in \{1,2,\dots,m\}}$ $z \in A_i$, a że A_i jest otwarty, to istnieje $r_i > 0$ takie, że $B(z, r_i) \subset A_i$.

Niech teraz $r_z = \min\{r_1, \dots, r_m\}$ (dzięki temu, że jest ich tylko skończenie wiele, wiemy, że minimum istnieje i jest > 0).

Wtedy $\forall_{i \in \{1, \dots, m\}}$ $B(z, r_z) \subset B(z, r_i) \subset A_i$,

więc $B(z, r_z) \subset A_1 \cap \dots \cap A_m$.

□

Zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ jest <u>domknięty</u>, gdy jego dopełnienie $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest zbiorem otwartym

<u>Przykłady</u>:

- zbiór pusty
- cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$
- pojedynczy punkt
- kula domknięta $\overline{B}(x, r)$
- zbiór Cantora jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Stosując do twierdzenia o sumach i częściach wspólnych zbiorów otwartych prawa de Morgana (dopełnienie sumy jest częścią wspólną dopełnień – i odwrotnie) dostajemy

Twierdzenie

a) część wspólna dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym

b) suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Def. Mówimy, że ciąg punktów $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest zbieżny do punktu $b\in\mathbb{R}^n$ jeżeli $\lim\limits_{m\to\infty} \|a_m - b\| = 0$.

(Jeszcze w zeszłym roku) udowodniliśmy, że

Tw. Następujące warunki są równoważne:

a) ciąg (a_m) jest zbieżny do $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$

b) dla każdego $k\in\{1,2,\dots,n\}$ ciąg liczbowy $(a_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ dąży do b_k.

k-ta współrzędna punktu a_m

Powyższe twierdzenie wynika od razu z nierówności

$$0 \leq |a_{m,k} - b_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{m,i} - b_i|^2\right)^{1/2} = \|a_m - b\|,$$

twierdzenia o 3 ciągach i o arytmetycznych własnościach granicy.

Def Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, gdy z każdego ciągu elementów zbioru K możemy wybrać podciąg zbieżny do elementu K.

Przypomnienie: w zeszłym roku udowodniliśmy

Twierdzenie Heine-Borela

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Szkic dowodu

$\Rightarrow$

Załóżmy, że A jest zwarty, ale nie jest domknięty. Istnieje wtedy ciąg (x_m) taki, że $\forall_m\ x_m \in A$, $x_m \to y$, ale $y \notin A$.

Z4 Każdy podciąg ciągu (x_m) też jest zbieżny do y, więc z (x_m) nie można wybrać podciągu zbieżnego do elementu K.

Załóżmy teraz, że A jest zwarty, ale nie jest ograniczony. Znajdziemy wtedy ciąg (x_m) taki, że $\forall_m\ x_m \in A$ i $\|x_m\| \to \infty$

Wtedy każdy podciąg ciągu (x_m) też ma normy rozbieżne do ∞, nie może więc być zbieżny (ciągi zbieżne są ograniczone - ten sam dowód, co w przypadku jednowymiarowym).

(15)

$\Leftarrow$

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony. ~~to~~
Niech (x_m) będzie ciągiem elementów A.

Wtedy ciągi liczbowe $(x_{m,1}), (x_{m,2}), \dots (x_{m,n})$ kolejnych współrzędnych ciągu (x_m) są ograniczone.
Z $(x_{m,1})$ możemy, z tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg $(x_{m_{k,1},1})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do y_1 : $x_{m_{k,1},1} \xrightarrow[k\to\infty]{} y_1$
Wtedy ciąg $(x_{m_{k,1},2})_{k\in\mathbb{N}}$ jest podciągiem ciągu $(x_{m,2})$.
Z $(x_{m_{k,1},2})_{k\in\mathbb{N}}$ wybieramy podciąg $(x_{m_{k,2},2})$ zbieżny do pewnego y_2 ...

z $(x_{m_{k,n-1},n})$ wybieramy podciąg $(x_{m_{k,n},n})$ zbieżny do y_n. Wtedy $x_{m_{k,n}} \longrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n) = y$, a dzięki temu, że A jest domknięty wiemy, że $y \in A$.

$\square$.

(16)

<u>Twierdzenie</u> Zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy granica każdego zbieżnego ciągu elementów F również należy do F

<u>Dowód</u>

(F domknięty $\Rightarrow$ granica ciągu zbieżnego należy do F)

Załóżmy przeciwnie - że zbiór F jest domknięty, ale istnieje ciąg (a_m) taki, że $\forall_m\, a_m \in F$, ale $a_m \xrightarrow[m\to\infty]{} b \notin F$. Skoro $b \notin F$, to $b \in \mathbb{R}^n \setminus F$, a zbiór $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest zbiorem otwartym. Stąd istnieje $r > 0$ takie, że $B(b,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$.

Wiemy jednak, że $a_m \to b$, więc dla dost. dużych m mamy $\|a_m - b\| < r$. Dla takich m z jednej strony $a_m \in F$, z drugiej $a_m \in B(b,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ sprzeczność.

(F domknięty $\Leftarrow$ granica ciągu zbieżnego należy do F)

Znów przez sprzeczność: załóżmy, że każdy zbieżny ciąg elementów F ma granicę w F, ale F nie jest domknięty, czyli $\mathbb{R}^n \setminus F$ nie jest otwarty. To znaczy, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$

$$\sim \left(\exists_{r>0}\ B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F \right)$$

czyli

$$\forall_{r>0} \quad B(x,r) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus F$$

$$\forall_{r>0} \quad B(x,r) \cap F \neq \emptyset$$

Niech zatem $y_m \in B(x, \frac{1}{m}) \cap F$. Ciąg (y_m) jest zbieżny do x (bo $\|y_m - x\| < \frac{1}{m}$), $\forall_m \, y_m \in F$, ale $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, więc $x \notin F$. Sprzeczność. ↯

Uwaga: Do zdefiniowania kuli otwartej użyliśmy normy euklidesowej ~~wz ten zs~~ Moglibyśmy całą tę konstrukcję (kul, zbiorów otwartych i domkniętych, ciągów zbieżnych) przeprowadzić dla dowolnej innej normy w $\mathbb{R}^n$. Okazuje się, że wprawdzie dla innych norm kule wyglądają inaczej, ale jakiej normy w $\mathbb{R}^n$ nie weźmiemy, ~~otwy~~ te same zbiory będą zbiorami otwartymi, te same – domkniętymi, te same ciągi będą zbieżne (do tych samych granic). Wynika to z twierdzenia o równoważności norm w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, które niebawem udowodnimy. Nie jest ono prawdziwe w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych!

Def Funkcja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest <u>ciągła</u> w $x \in A$, gdy (równoważnie)

(C) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y \in A} \ \|y-x\|<\delta \Rightarrow \|f(y)-f(x)\|<\varepsilon$

(H) dla każdego ciągu (x_k) elementów zbioru A jeżeli $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$, to $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$.

f jest ciągła na A, gdy $\forall_{x\in A}$ f jest ciągła w x.

Dowód równoważności warunków (C)auchy'ego i (H)eine'go jest dokładnie taki sam jak w przypadku jednowymiarowym, trzeba tylko w miejsce wartości bezwzględnych powstawiać odpowiednio normy.

Analogicznie definiujemy jednostajną ciągłość: Funkcja f jest <u>jednostajnie ciągła</u> na A, gdy $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in A} \ \|x-y\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

Jak wspominałem już w zeszłym roku, kilka ważnych twierdzeń, które dowodziliśmy najpierw dla odcinka domkniętego zachodzi bez zmian dowodu dla dowolnego zbioru zwartego – również w $\mathbb{R}^n$:

<u>Twierdzenie</u> (Weierstrassa o osiąganiu kresów)

Jeżeli $f : K \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą (na K), a zbiór K jest zwarty, to istnieją punkty $u, v \in K$ takie że

$$f(u) = \sup_{x \in K} f(x)$$

$$f(v) = \inf_{x \in K} f(x)$$

(Czyli funkcja f przyjmuje na K swoje kresy).

Dowód można przeprowadzić powtarzając dowód jednowymiarowy, my udowodnimy ogólniejsze

<u>Twierdzenie</u> (też Weierstrassa)

Jeżeli $f : K \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła na K, a zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ też jest zbiorem zwartym.

(czyli funkcja ciągła przekształca zbiory zwarte na zwarte).

<u>Dowód</u>

Niech (y_m) będzie ciągiem elementów $f(K)$. Wtedy $\forall_m \exists_{x_m \in K}$ $f(x_m) = y_m$. Ze zwartości zbioru K z ciągu (x_m) możemy wybrać podciąg zbieżny $x_{m_i} \xrightarrow{i \to \infty} x \in K$. Wtedy, z ciągłości f, $\cancel{f(x_{m_i}) \to f(x)} \in f(K)$.

$$y_{m_i} = f(x_{m_i}) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(x) \in f(K)$$

Znaleźliśmy zatem podciąg (y_{m_i}) ciągu (y_m) zbieżny do elementu $f(K)$. Stąd $f(K)$ jest zwarty.

Dowód tw. Weierstrassa o osiąganiu kresów

$\underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{K}}$ jest zwarty, $f: K \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc z tw. Weierstrassa o obrazie zbioru zwartego $f(K)$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Funkcja $h(x) = x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ i przyjmuje na $f(K)$ swoje kresy (1-wymiarowe tw. Weierstrassa): istnieją $w, z \in f(K)$ takie, że

$$w = h(w) = \sup_{t\in f(K)} h(t) = \sup_{t \in f(K)} t = \sup f(K)$$

$$z = h(z) = \inf_{t\in f(K)} h(t) = \ldots = \inf f(K)$$

ale

$$\sup_{x\in K} f(x) \equiv \sup f(K)$$

$$\inf_{x\in K} f(x) \equiv \inf f(K)$$

Jeżeli więc weźmiemy u takie, że $f(u) = w$ i v takie, że $f(v) = z$

to

$$f(u) = \sup_{x\in K} f(x)$$

$$f(v) = \inf_{x\in K} f(x) \qquad \square.$$

Tw. (Heine-Cantora)

Funkcja ciągła określona na zbiorze zwartym jest na nim jednostajnie ciągła
(dowód taki sam, jak w przypadku jednowymiarowym).

Bez istotnych zmian (innych niż podmiana wartości bezwzględnej na normę) przechodzą twierdzenia o własnościach arytmetycznych funkcji ciągłych:

- jeżeli $f, g : A \to \mathbb{R}$ są ciągłe w $a \in A$,
  - to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcja $\alpha f + \beta g : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $a \in A$
  - funkcja $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $a \in A$
  - jeżeli dodatkowo $g(a) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest ciągła w a

ta funkcja jest określona na $A \setminus \{x \in A : g(x) = 0\}$.

- jeżeli $f : A \to \mathbb{R}^m$ (gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$) jest ciągła w ~~A~~ $a \in A$, $f(A) \subset B$ i $g : B \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła w $f(a)$, to $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła w A.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Łatwa obserwacja pozwala nam sprowadzić badanie ciągłości funkcji o wartościach w przestrzeni n-wymiarowej do badania ciągłości jej funkcji współrzędnych:

$\underline{f} = (f_1,\dots,f_{m-1},f_m): A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła w $a\in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągłe w a są funkcje $f_1,\dots,f_m: A\to\mathbb{R}$.

Wynika to od razu z nierówności

$$0<|f_j(y)-f_j(a)|\le\left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(y)-f_i(a)|^2\right)^{1/2}=\|f(y)-f(a)\|.$$

Przykłady funkcji ciągłych:

- Dla każdego $i\in\{1,2,\dots,n\}$ funkcja $h_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $h_i(x)=x_i$ jest ciągła na $\mathbb{R}^n$.

~~Udowodnimy.~~

Dlaczego? Dla dowolnego $x\in\mathbb{R}^n$ i $\varepsilon>0$ weźmy $\delta=\varepsilon$, wtedy jeżeli $\|y-x\|<\delta$, to

$$|h_i(y)-h_i(x)|=|y_i-x_i|\le\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j-x_j|^2\right)^{1/2}=\|y-x\|<\delta=\varepsilon.$$

Jest to szczególny przypadek funkcji lipszycowskiej:

Def: $f : A^{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m$ spełnia na A warunek Lipschitza, gdy istnieje $L > 0$ taka, że

$$\forall_{x,y \in A} \quad \| f(x) - f(y) \| \le L \| x - y \|.$$

Funkcje lipszycowskie na A są na A jednostajnie ciągłe (dowód ten sam co w przypadku jednowymiarowym);

funkcja h_i jest lipszycowska na $\mathbb{R}^n$, ze stałą 1:

$$| h_i(x) - h_i(y) | = |x_i - y_i| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} = \| x - y \|.$$

Wniosek:

~~$f: \mathbb{R}^1$~~ Norma euklidesowa jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^n$

Dowód: Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$.

Wtedy $| f(x) - f(y) | = | \|x\| - \|y\| | = (*)$

z nier. trójkąta mamy

$$\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$$

i $\|y\| = \cancel{\|y - x + x\|}$

$$\|y - x + x\| \le \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \le \|x - y\|$$

(24)

Stąd

$$(*) = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|,$$

więc norma spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 - jest więc ciągła, i to jednostajnie.

- z twierdzeń o sumie, iloczynie funkcji ciągłych wynika, że wielomiany (wielu zmiennych), np

$$f(x,y,z) = x^5 y + x^3 yz + yz^5 + xz$$

są funkcjami ciągłymi

- w szczególności ciągłe są przekształcenia liniowe:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{liniowe, to}$$

$$T(x) = (T_1(x), T_2(x), \dots, T_m(x)), \quad \text{gdzie}$$

$T_1, \dots, T_m$ są funkcjami liniowymi zmiennej x (wielomianami stopnia 1)

- wyznacznik $\det : M^{n\times n} \approx \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

też jest wielomianem ~~zmie~~ od wyrazów macierzy (a_{ij}). Jest więc ciągły.

Twierdzenie

Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ ciągła, V niech będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$. Wtedy $f^{-1}(V)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

Dowód

Musimy wykazać, że dla każdego $x \in f^{-1}(V)$ istnieje $r>0$ takie, że $B(x,r) \subset f^{-1}(V)$.

Niech więc $x \in f^{-1}(V)$. Oczywiście $f^{-1}(V) \subset \mathcal{U}$, więc $x \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ jest zbiorem otwartym $\Rightarrow \exists_{\varrho>0}\ B(x,\varrho) \subset \mathcal{U}$

$f(x) \in V$, V jest zbiorem otwartym $\Rightarrow \exists_{\varepsilon>0}\ B(f(x),\varepsilon) \subset V$

f jest ciągła w x, więc istnieje $\delta_\varepsilon > 0$ takie, że

$$\forall_{y \in \mathcal{U}}\ \|y-x\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(y)-f(x)\| < \varepsilon$$

równoważnie

$$\forall_{y \in \mathcal{U} \cap B(x,\delta_\varepsilon)}\ f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \subset V$$

kładąc $r = \min(\varrho, \delta_\varepsilon)$ widzimy więc, że

$$\forall_{y \in B(x,r)}\ f(y) \in V \qquad (\text{bo } B(x,r) \subset \mathcal{U} \cap B(x,\delta_\varepsilon))$$

cyli $y \in f^{-1}(V)$. Tym samym $B(x,r) \subset f^{-1}(V)$.

$\square$

Wniosek: Macierze odwracalne tworzą otwarty podzbiór $M^{n\times n} \approx \mathbb{R}^{n^2}$

(bo są równe $\det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{zbiór otwarty}})$).

Wykazaliśmy, że każde przekształcenie liniowe $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłe (bo jego funkcje współrzędne są funkcjami liniowymi – a więc wielomianami stopnia 1 – argumentu).

Udowodniliśmy też, że norma euklidesowa spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 ($|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$), więc jest funkcją ciągłą (i to jednostajnie).

Wykażemy teraz, że każda (inna) norma też spełnia na $\mathbb{R}^n$ warunek Lipschitza (choć jego stała może zależeć od normy).

Niech bowiem $|||\cdot|||$ oznacza normę w $\mathbb{R}^n$; przez $e_1, \dots, e_n$ oznaczmy bazę standardową w $\mathbb{R}^n$ ($e_j = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ta współrzędna}}}{1},0,\dots,0)$). Mamy wtedy, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$|||x||| = |||\sum_{i=1}^{n} x_i e_i||| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |||e_i||| = \langle \bar{X}, E \rangle_e = (*)$$

gdzie $\bar{X} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, $E = (|||e_1|||, |||e_2|||, \dots, |||e_n|||)$

$$(*) \underset{\text{nier. Schwarza}}{\leq} \|\bar{X}\| \cdot \|E\| = \|x\| \cdot \|E\| \qquad (\text{bo } \|\bar{X}\| = \|x\|)$$

Stąd i z nierówności trójkąta dla normy $|||\cdot|||$:

$$\left|\,|||x||| - |||y|||\,\right| \le |||x-y||| \le \|E\| \cdot \|x-y\|$$

nier. Δ
dla $|||\cdot|||$

Tym samym norma $|||\cdot|||$ spełnia na $\mathbb{R}^n$ warunek Lipschitza, jest więc na $\mathbb{R}^n$ funkcją ciągłą.

<u>Def</u>: Mówimy, że 2 normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$, na $\mathbb{R}^n$ są równoważne, jeżeli istnieje stała $C>0$ taka, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$$

<u>Twierdzenie</u>: Dowolne 2 normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

<u>Dowód</u>: Wykażemy, że każda norma na $\mathbb{R}^n$ jest równoważna normie euklidesowej.

Zauważmy, że połowę pracy już w zasadzie wykonaliśmy: dowodząc, że norma $|||\cdot|||$ spełnia warunek Lipschitza wykazaliśmy wcześniej, że istnieje stała $C>0$ ~~ta~~, równa $\|E\|$, taka, że $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad |||x||| \leq C \|x\|$.

Nie skorzystamy z tego jednak, dowodząc równoważności normy ~~ina~~ $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|$ (euklidesowej) inaczej.

<u>Krok 1</u> Sfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ jest zbiorem zwartym. Jest bowiem w oczywisty sposób zbiorem ograniczonym. Czy jest domknięta? Rozważmy ciąg (x_m) ~~elemen~~ punktów $\mathbb{R}^n$ taki, że $\forall_m \; x_m \in S^{n-1}$ i $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} y$. Wówczas $1 = \|x_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} \|y\|$, bo ~~norma~~ norma euklidesowa jest funkcją ciągłą, więc $\|y\| = 1 \Rightarrow y \in S^{n-1}$.

(Inaczej można tak: $S^{n-1} = \cancel{\bigcap_{i=1}^{\infty} (\overline{B}(0,1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0,1-\frac{1}{i})}$

$$= \underbrace{\overline{B}(0,1)}_{\text{domknięty}} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus \underbrace{B(0,1)}_{\text{otwarty}})}_{\text{domknięty}}).$$

<u>Krok 2</u> Norma $\|\cdot\|_1$, jako funkcja ciągła, przyjmuje na S^{n-1} swoje kresy: istnieje $u \in S^{n-1}$ takie, że $\|u\|_1 = \max_{x \in S^{n-1}} \|x\|_1 = \alpha$ i $v \in S^{n-1}$ $\qquad \|v\|_1 = \min_{x \in S^{n-1}} \|x\|_1 = \beta$

Teraz, dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|y\|_1 = \left\| \frac{y}{\|y\|} \cdot \|y\| \right\|_1 = \|y\| \cdot \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|_1 .$$

Punkt $\frac{y}{\|y\|}$ należy do S^{n-1}, więc

$$\|y\| \cdot \beta \leq \|y\|_1 \leq \|y\| \cdot \alpha$$

Biorąc $C = \max\left(\alpha, \frac{1}{\beta}\right)$ dostajemy

$$\frac{1}{C}\|y\| \leq \|y\|_1 \leq C\|y\|$$

<u>Zagadka:</u>
skąd wiemy, że
$\beta > 0$?

Krok 3

Jeżeli mamy teraz porównać dwie normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$, ~~piszemy~~ korzystamy z tego, że istnieją

$C_1 > 0$ t.ż. $\forall_{y \in \mathbb{R}^n}$ $\frac{1}{C_1}\|y\| \leq \|y\|_1 \leq C_1\|y\|$

$C_2 > 0$ t.ż. $\forall_{y \in \mathbb{R}^n}$ $\frac{1}{C_2}\|y\| \leq \|y\|_2 \leq C_2\|y\|$,

więc

$$\frac{1}{C_1 C_2}\|y\|_1 \leq \frac{1}{C_2}\|y\| \leq \|y\|_2 \leq C_2\|y\| \leq C_1 C_2 \|y\|_1$$