Kolokwium domowe
Analiza matematyczna II.1*

grudzień 2018

Zasady: Z poniższych 10 zadań należy wybrać 6 i przynieść rozwiązania osobiście bądź przesłać e-mailem rozwiązania do wtorku, 11 grudnia, do godziny 14:15. Rozwiązania zostaną ocenione w skali 0-10 punktów, następnie dla zadania nr n, $n = 1, \ldots, 10$, wyznaczymy *współczynnik trudności* W_n, zgodnie z wzorem

$$W_n = 2 - \min\left(1, \frac{10 \cdot (\text{suma wszystkich punktów za zadanie } n)}{\text{suma wszystkich punktów w kolokwium}}\right)$$

i ostateczną liczbę punktów za zadanie n wyznaczymy, mnożąc punkty za to zadanie przez współczynnik W_n.

Jeżeli ktoś z Państwa rozwiąże i odda więcej niż 6 zadań, wybierzemy z nich 6 najlepszych (po skorygowaniu współczynnikiem trudności), a o nadwyżce punktów za nieuwzględnione zadania będziemy w jakiś sposób pamiętać.

Zadanie 1. Dla każdej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiujemy

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|.$$

Niech $X = \{f \in C(\mathbb{R}) \quad : \quad \|f\| < \infty\}$. Wykaż, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 2.

1. Wykaż, że gdy $H = \mathbb{R}^n$, to zbiór $U(H) = \{T \in B(H,H) \quad : \quad T \text{ odwracalny}\}$ jest gęsty w $B(H,H)$.
2. Rozważ $H = \ell^2$, podprzestrzeń $H_1 = \{x \in \ell^2 \quad : \quad x_1 = 0\}$ i przekształcenie $S\colon H \to H$ dane wzorem $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Dla każdego $T \in B(H,H)$ definiujemy $T'\colon H \to H_1$, $T'x = Tx - \langle Tx, e_1\rangle e_1$, gdzie $e_1 = (1,0,0,\ldots) \in \ell^2$.
   - wykaż, że dla każdego $T \in B(H,H)$ mamy $T' \in B(H,H_1)$,
   - wykaż, że jeżeli $|||T||| < 1$, to $S + T' \in B(H,H_1)$ jest odwracalny,
   - wywnioskuj, że $e_1 \notin (S+T)(H)$,
   - wywnioskuj, że kula w $B(H,H)$ o środku w S i promieniu 1 nie zawiera punktów z U.

Zadanie 3. Niech $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_1$. W których punktach $x \in \ell^1$ funkcja f jest silnie różniczkowalna (tzn. różniczkowalna w sensie Frécheta)? różniczkowalna w sensie Gateaux?

Zadanie 4. Funkcja $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła na $[0,\infty)$ i różniczkowalna na $(0,\infty)$; dodatkowo wiemy, że $F(0) = 0$ i istnieje $c > 0$ taka, że dla każdego $t > 0$ zachodzi $\|DF(t)\| \le c\|F(t)\|$. Czy wynika stąd, że F jest tożsamościowo równa zero?

Zadanie 5. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym i niech $p > 0$. Znajdź funkcję różniczkowalną $f\colon U \to \mathbb{R}$ spełniającą dla dowolnego $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ równanie

$$pf(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n),$$

gdzie h jest ustaloną funkcją klasy C^1.

Uwaga: $U \subset \mathbb{R}^n$ jest *gwiaździsty*, gdy istnieje $a \in U$ takie, że dla każdego $z \in U$ odcinek $[a, z]$ zawiera się w U.

Zadanie 6. Niech $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ będzie krzywą klasy C^1 spełniającą $\gamma'(t) \neq 0$ dla $t \in (0, 1)$. Wykaż, że dla każdego $t \in (a, b)$ istnieją:

- otoczenie U punktu $(t, 0) \in \mathbb{R}^2$,
- otoczenie V punktu $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ oraz
- dyfeomorfizm $F\colon U \to V$ spełniający $F(t, 0) = \gamma(t)$, którego jakobian jest ściśle dodatni we wszystkich punktach U.

Zadanie 7. Dla ustalonych $0 < k \leq n$ niech $\mathcal{M} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ \operatorname{rank} A = k\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Wykaż, że $\mathcal{M}$ jest podrozmaitością w $\mathbb{R}^{n^2}$ i wyznacz jej wymiar.

Zadanie 8. Niech $U = \{(u, v, s, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ u^2 + v^2 > 0, t > 0\}$, $X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 > 0, w > 0\}$. Niech $F\colon U \to X$ będzie dane wzorem $F(u, v, s, t) = (tu, tv, s, u^2 + v^2)$.

- Wykaż, że F jest dyfeomorfizmem,
- niech $T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 4\sqrt{x^2 + y^2},\ w = 1\}$. Wyznacz równania opisujące $F^{-1}(T)$.

Zadanie 9. Niech $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y, z > 0,\ x + y + z = 4,\ xyz = 2\}$. Znajdź minimum i maksimum funkcji f danej wzorem $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ na zbiorze C.

Zadanie 10. Ustalmy $y \in \mathbb{R}^n$ i niech $Q \in M_{n\times n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Niech $w = \max\langle y, x\rangle$ pod warunkiem $\langle x, Qx\rangle \leq 1$.

- Korzystając z warunków KKT wykaż, że $w = \sqrt{\langle y, Q^{-1}y\rangle}$.
- Wywnioskuj stąd następujące uogólnienie nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, Qx\rangle \cdot \langle y, Q^{-1}y\rangle.$$
