Udowodniliśmy

<u>Twierdzenie Banacha o punkcie stałym</u>

Jeżeli (X,d) jest przestrzenią metryczną zupełną (np. domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha), $T: X \to X$ jest kontrakcją, tj. przekształceniem lipszycowskim o stałej Lipschitza $L<1$, to T ma w X dokładnie 1 punkt stały, tzn. istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $T(x)=x$, $x \in X$.

Zachodzi też ważne twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u> (o ciągłej zależności punktu stałego od parametru) Niech $A \subset X$ i niech $B \subset Y$ będzie domknięty; dalej, niech $F: A \times B \to B$ niech będzie funkcją ciągłą taką, że dla każdego $x \in A$ $T_x: B \to B$, $T_x(y) = F(x,y)$, jest kontrakcją i istnieje stała Lipschitza $L<1$ wspólna dla wszystkich T_x, $x \in A$ (tj. $\forall_{x \in A} \forall_{y_1, y_2 \in B} \|T_x(y_1) - T_x(y_2)\|_Y \leq L \|y_1 - y_2\|_Y$).

Wówczas, jeżeli oznaczymy (jedyny, z tw. Banacha) punkt stały T_x przez $y(x)$, to $x \longmapsto y(x)$ jest ciągłą funkcją zmiennej x.

Dowód: Ustalmy $x_0 \in A$. Wówczas dla każdego $x \in A$

$$\|y(x)-y(x_0)\|_Y = \|T_x(y(x)) - T_{x_0}(y(x_0))\|_Y$$

$$\le \|T_x(y(x)) - T_x(y(x_0))\|_Y + \cancel{\|T_x(y(x_0)) - T_{x_0}(y}$$

$$+ \|T_x(y(x_0)) - T_{x_0}(y(x_0))\|_Y \le$$

$$\le L\|y(x)-y(x_0)\|_Y + \|T_x(y(x_0)) - T_{x_0}(y(x_0))\|_Y,$$

skąd $\|T_x(y(x_0)) - T_{x_0}(y(x_0))\|_Y \ge (1-L)\|y(x)-y(x_0)\|_Y$

$$\| \qquad \|F(x,y(x_0)) - F(x_0,y(x_0))\|$$

. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Funkcja F jest ciągła na $A \times B$, więc istnieje takie $\delta > 0$, że jeżeli ~~tz~~ $\|x-x_0\|_X + \|y-y(x_0)\|_Y < \delta$, to $\|F(x,y) - F(x_0,y(x_0))\|_Y < \varepsilon$. W szczególności jeżeli $\|x-x_0\|_X < \delta$, to ~~$\|F(x)$~~

$$\|F(x,y(x_0)) - F(x_0,y(x_0))\|_Y < \varepsilon$$

$$\text{V/}$$

$(1-L)\|y(x)-y(x_0)\|$. To dowodzi ciągłości $y(x)$ w punkcie $x = x_0$.

to jest pewna ustalona stała >0.

$\square$.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Niech $f : X \times Y \to Z$. Rozważmy, dla $c \in Z$, równanie

$$f(x,y) = c. \qquad (*)$$

Geometrycznie, równanie to opisuje pewien podzbiór zbioru $X \times Y$ — poziomicę funkcji f. To, jakim zbiorem jest ta poziomica, zależy oczywiście od funkcji f, wartości c i tego, czym są zbiory X, Y i Z. W standardowej sytuacji, gdy $X = Y = Z = \mathbb{R}$ równanie $(*)$ jest równaniem skalarnym o dwóch niewiadomych, więc z reguły nie możemy go rozwiązać. Często jednak możemy wyznaczyć jedną ze zmiennych x, y jako funkcję drugiej:

$$f(x,y) = 2x + 3y = 1, \quad \text{to} \quad y = \frac{1-2x}{3} = y(x)$$

$$x = \frac{1-3y}{2} = x(y).$$

Najprostszy nietrywialny przykład to $f(x,y) = x^2 + y^2$.

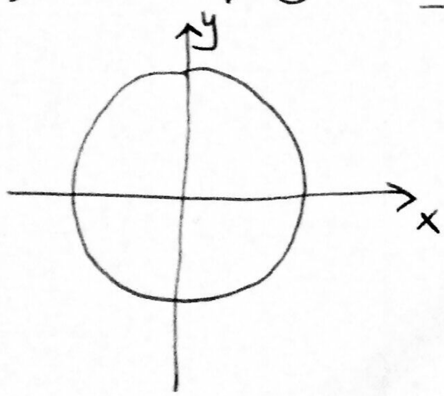
Równanie $x^2 + y^2 = c$ nie ma rozwiązań, gdy $c < 0$; gdy $c = 0$, możemy je rozwiązać ($x = y = 0$), bo odpowiednia poziomica f jest zbiorem jednopunktowym.

Dla $c>0$ mamy $x^2+y^2=c \iff y(x)=\sqrt{c-x^2}$

lub $y(x)=-\sqrt{c-x^2}$

i nie wiemy, a priori, który z tych wzorów wybrać, bo oba są dobre: $x^2+(y(x))^2=c$

Stwierdzenie, że każde rozwiązanie $(*)$ jest postaci $(x,y(x))$, gdzie $y(x)$ jest pewną funkcją, $y: X \to Y$, odpowiada stwierdzeniu, że poziomica $\{f(x,y)=c\}$ jest wykresem funkcji $y: X \to Y$. Poziomice $f(x,y)=x^2+y^2$ odpowiadające $c>0$ <u>nie są</u> wykresami żadnej funkcji:



Zadajmy zatem trochę słabsze pytanie: załóżmy, że mamy pewne szczególne rozwiązanie równania (*) ~~$f(x,y)=c$~~ oznaczone (x_0,y_0): $f(x_0,y_0)=c$.

Czy przynajmniej w otoczeniu punktu (x_0,y_0) poziomica $\{f(x,y)=c\}$ daje się opisać jako wykres funkcji $y: X \to Y$?

a w zasadzie tu powinno być otoczenie x_0 w X.

Dla $f(x,y) = x^2+y^2$ i $(x_0,y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tak:
$c = 1$

mamy $y^2 = 1-x^2$ i dla (x,y) bliskich (x_0,y_0) wiemy, że $y>0$, zatem
$$y(x) = y = \sqrt{1-x^2}.$$
i dla każdego x bliskiego x_0 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $x^2+y^2=1$ i jest ono dane jako $(x, y(x))$, co więcej, funkcja $y(x)$ jest przyzwoita: w otoczeniu x_0 jest ∞-wiele razy różniczkowalna.

Za to w otoczeniu $(x_0,y_0) = (1,0)$ mamy zarówno dodatnie, jak i ujemne y-ki i nie wiemy, który ze znaków przed pierwiastkiem wybrać: $y = \sqrt{1-x^2}$ czy $y = -\sqrt{1-x^2}$. Tu ~~wprawdzie znowu~~ dla każdego x ~~bliskiego~~ bliskiego i mniejszego od $x_0 = 1$ istnieją **dwa** rozwiązania równania $x^2+y^2=1$, a dla $x>1$ równanie to nie ma rozwiązań. Zauważmy za to, że możemy w otoczeniu $(1,0)$ wyznaczyć x jako funkcję zmiennej y.
Chcemy nauczyć się odróżniać te dwie sytuacje.

Umowa: Jeżeli $\Omega \subset X \times Y$ jest otwarty, $f : \Omega \to Z$, $(a,b) \in \Omega$, to przez $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ oznaczać będziemy pochodną $Dg_1(a)$ funkcji $g_1 : B_X(a,\varepsilon) \to Z$, ~~funkcji~~ $g_1(x) = f(x,b)$.

Stąd $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \in B(X,Z)$ { we wzorze na f wstawiamy $y = b$ i liczymy pochodną względem x w punkcie $x = a$

Analogicznie, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in B(Y,Z)$ to pochodna $Dg_2(b)$ funkcji $y \longmapsto g_2(y) = f(a,y)$ w punkcie $y = b$.

Twierdzenie (o istnieniu i ciągłości funkcji uwikłanej).

Niech X, Y, Z będą przestrzeniami Banacha, $\Omega \subset X \times Y$ otwarty, $f : \Omega \to Z$ ciągła i dla pewnych $(a,b) \in X \times Y$ zachodzi $f(a,b) = c$.
$c \in Z$

Załóżmy dalej, że istnieją zbiory otwarte $\mathcal{U} \subset X$ i $V \subset Y$ takie, że $(a,b) \in \mathcal{U} \times V \subset \Omega$ oraz

1) dla wszystkich $x \in \mathcal{U}$, $y \in V$ istnieje $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in B(Y,Z)$

i $\mathcal{U} \times V \ni (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in B(Y,Z)$

jest funkcją ciągłą

oraz

2) $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in B(Y,Z)$ jest odwracalny (jako p-nie liniowe) i odwrotne do niego też jest ciągłe.

Wtedy istnieją takie zbiory otwarte $A \subset X$, $B \subset Y$, że $(a,b) \in A \times B \subset \mathcal{U} \times V$ i dla dowolnego $x \in A$ równanie $f(x,y) = c$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = y(x) \in B$, a funkcja $A \ni x \longmapsto y(x) \in B$ jest ciągła.

<u>Zadanie</u>: Sprawdzić, że $f(x,y) = x^2 + y^2$, $c = 1$ spełniają założenia twierdzenia w $(a,b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a nie spełniają ich w $(a,b) = (1,0)$.

W dowodzie tego twierdzenia jest jeden istotny pomysł: przeformułowanie równania $f(x,y) = c$ tak, by zamienić je na szukanie punktu stałego pewnej kontrakcji, i dużo technicznych elementów, które są po to, by móc w tej sytuacji zastosować tw. Banacha o punkcie stałym. W szczególności, wybór zbiorów A i B jest kilkustopniowy.

<u>Dowód</u>: Zaczniemy od przeformułowania równania

$$(*) \qquad f(x,y) = c$$

a dokładniej, ~~od~~ zadania (Z1):

Rozwiąż równanie $f(x,y) = c$ w otoczeniu rozwiązania szczególnego (a,b).

• przesuwamy, w Y i Z, w pobliże $0 \in Y$ i $0 \in Z$:

rozważmy $\Omega_1 \subset X \times Y$, $\Omega_1 = \Omega - (0,b)$, tzn.

$$\Omega_1 = \{(x, y-b) : (x,y) \in \Omega\}$$

i $f_1 : \Omega_1 \to Z$, $f_1(x,y) = f(x,y+b) - c$

Zadanie (Z1) jest równoważne zadaniu

(Z2) rozwiąż $f_1(x,\tilde{y}) = 0 \in Z$ w otoczeniu rozwiązania szczególnego $(a,0)$ $\{ \tilde{y} = y - b$

• poprawiamy pochodną f_1: ~~…~~

$\left\{\begin{array}{l}\text{i przechodzimy} \\ \text{od } f_1 : \Omega_1 \to Z \\ \text{do } f_2 : \Omega_1 \to Y\end{array}\right.$

niech $f_2 : \Omega_1 \to Y$, $f_2 = Q^{-1} \circ f_1$.

Mamy wtedy $\frac{\partial f_2}{\partial y}(a,0) = Q^{-1} \circ \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,0) =$

$$= Q^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = Q^{-1} \circ Q = Id_Y$$

i zadanie (Z2) jest równoważne zadaniu

(Z3) rozwiąż $f_2(x,\tilde{y}) = 0 \in Y$ w otoczeniu rozwiązania szczególnego $(a,0)$

$\left\{\begin{array}{l}\text{przejście z (Z2)} \\ \text{do (Z3) to} \\ \text{złożenie równania} \\ \text{z (Z2) stronami} \\ \text{z } Q^{-1}\text{; w drugą} \\ \text{stronę - z } Q\end{array}\right.$

• przerabiamy na poszukiwanie punktu stałego:

niech $f_3 : \Omega_1 \to Y$, $f_3(x, \tilde{y}) = \tilde{y} - f_2(x, \tilde{y})$.

Wtedy (Z3) jest równoważne zadaniu

(Z4) rozwiąż równanie $f_3(x, \tilde{y}) = \tilde{y}$
w otoczeniu rozwiązania szczególnego $(a, 0)$.

Zauważmy, że $\frac{\partial f_3}{\partial y}(a, 0) = Id_Y - \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, 0) =$

$$= Id_Y - Id_Y = 0 .$$

Mamy teraz następujące zagadnienie: dla ustalonego x z otoczenia punktu a szukamy punktu stałego funkcji F_x, gdzie $F_x(\tilde{y}) = f_3(x, \tilde{y})$. Na razie wiemy, że F_x przekształca pewne otoczenie $0 \in Y$ w Y. Na to, by użyć twierdzenia Banacha o punkcie stałym, F_x powinno przekształcać pewien zbiór $B_1 \subset Y$, $0 \in B_1$, w siebie; do tego B_1 powinien z metryką $d(x, y) = \|x - y\|_Y$, być przestrzenią zupełną. Aby tak było, zbiór B_1 musi być domknięty (zagadka: dlaczego?). Do tego F_x musi być kontrakcją $B_1 \to B_1$.

Przyjrzyjmy się najpierw temu ostatniemu warunkowi.

Wiemy, że $DF_x(\tilde{y}) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,\tilde{y})$, $DF_a(0) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(a,0) = 0$

i $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,\tilde{y})$ w sposób ciągły zależy od x i $\tilde{y}$.

Istnieją zatem takie $A_1 \subset U$ otwarte otoczenie punktu a

oraz $B_1 \subset V$

$B_1 = \overline{B_Y}(0,\varepsilon)$ kula domknięta o środku w 0, o dostatecznie małym promieniu $\varepsilon > 0$,

że $|||DF_x(\tilde{y})||| = \left|\left|\left|\frac{\partial f_3(x,\tilde{y})}{\partial y}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{2}$ dla $(x,\tilde{y}) \in A_1 \times B_1$.

Wtedy, z twierdzenia o wartości średniej,

$$\forall_{x \in A_1} \ \forall_{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in B_1} \quad \|F_x(\tilde{y}_1) - F_x(\tilde{y}_2)\| \leq \sup_{B_1} |||DF_x(\tilde{y})||| \cdot \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\| \leq \frac{1}{2}\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|,$$

czyli dla wszystkich $x \in A_1$ funkcja $F_x : B_1 \to Y$ jest kontrakcją, ze stałą Lipschitza $1/2$.

Czy przeprowadza B_1 w B_1? nie mamy pewności, ale możemy to zapewnić sobie zmniejszając zbiór A_1:

Niech $A \subset A_1$ będzie takim otoczeniem $a \in X$, że ~~$\overline{A} \subset A_1$ ora~~ dla $x \in A$ $\|f_3(x,0) - \underbrace{f_3(a,0)}_{=0}\| < \frac{1}{2}\varepsilon$

Wtedy, dla $(x,\tilde{y}) \in A \times B_1$,

$$\|F_x(\tilde{y})\|_Y \le \|F_x(\tilde{y}) - F_x(0)\| + \|F_x(0) - \underbrace{F_a(0)}_{=0}\|$$
$$\le \frac{1}{2}\|\tilde{y}\| + \|f_3(x,0) - f_3(a,0)\|$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \text{ zatem}$$

$$F_x(\tilde{y}) \in B_Y(0,\varepsilon) \subset B_1$$

No to z twierdzenia Banacha o punkcie stałym ~~punkt stały $\tilde{y}(x)$~~ w B_1 istnieje dokładnie jeden punkt stały $\tilde{y}(x)$, czyli rozwiązanie równania $F_x(\tilde{y}(x)) = \tilde{y}(x)$, a więc rozwiązanie zadania Z4 w $A \times B_1$.

Co więcej, z twierdzenia o ciągłej zależności punktu stałego od parametru od razu dostajemy, że $\tilde{y}: A \to B_1$ jest ciągłą funkcją parametru $x \in A$ (proszę sprawdzić, że spełnione są wszystkie jego założenia).

Dokonajmy jeszcze jednej poprawki: niech $B_2 = B_Y(0,\varepsilon)$. Z rachunku na górze strony wynika, że $\forall_{x\in A} \forall_{y \in B_2} F_x(\tilde{y}) \in B_2$, więc $\forall_{x \in A}$ punkt stały $\tilde{y}(x)$ funkcji F_x leży w B_2.

Zostaje nam tylko wrócić do zadania Z4

do zadania (Z1), ostatecznie zbiór B to B_2 przesunięte o b (tak, by B było otoczeniem punktu $b \in Y$).