Jak zwykle X jest przestrzenią Banacha.

<u>Def</u>: Niech $A \subset X$ i niech $a \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A. Mówimy, że wektor $v \in X$, $v \neq 0$, jest styczny do zbioru A w punkcie a, jeżeli istnieje taki ciąg punktów $p_m \in A \setminus \{a\}$, $m = 1, 2, \dots$, że

•) $p_m \xrightarrow{m \to \infty} a$

oraz ••) $$\frac{p_m - a}{\|p_m - a\|} \longrightarrow \frac{v}{\|v\|}$$

Umawiamy się też, że wektor $v = 0$ jest styczny do A w każdym punkcie $a \in A$.

<u>Uwaga</u>: Z definicji wektora stycznego od razu wynika, że gdy $\lambda \geq 0$ i v jest styczny do A w a, to również wektor λv jest styczny do A w a.

<u>Def</u>: Zbiór wszystkich wektorów stycznych do zbioru A w punkcie a nazywamy <u>stożkiem stycznym</u> (do A w a) i oznaczamy $T_a A$.

Zachodzi ważne

<u>Twierdzenie</u>: Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f: U \to \mathbb{R}$ niech będzie ciągła w $a \in U$.
Następujące warunki są równoważne
1) f jest różniczkowalna w a
2) stożek styczny do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$ jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową niezawierającą wektora $(0, 0, \dots, 0, 1)$

Dowód

Oznaczmy wykres funkcji: $G_f = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \underset{\mathbb{R}^{n+1}}{\underbrace{U \times \mathbb{R}}}$

1) $\Rightarrow$ 2) Wykażemy, że $T_{(a,f(a))} G_f = \{(v, Df(a)v) : v \in \mathbb{R}^n\}$ (a więc stożek styczny do G_f w $(a, f(a))$ to wykres przekształcenia liniowego $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Jeżeli to wiemy, to widać, że $T_{(a,f(a))} G_f$ jest n-wym. przestrzenią liniową, bo to obraz $\mathbb{R}^n$ w przekształceniu liniowym $(id, Df(a)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, które ewidentnie ma rząd n. Widać też, że wektor $(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nie należy do tego stożka, bo nie jest postaci $(v, Df(a)v)$.

Aby wykazać, że $T_{(a,f(a))} G_f = \{(v, Df(a)v) : v \in \mathbb{R}^n\}$, musimy sprawdzić dwie rzeczy:

($\cdot$) że każdy wektor postaci $(v, Df(a)v)$ należy do $T_{(a,f(a))} G_f$

oraz

($\cdot\cdot$) że każdy wektor styczny do G_f w $(a, f(a))$ jest postaci $(v, Df(a)v)$ dla pewnego $v \in \mathbb{R}^n$.

Dowodzimy (∘).

Ustalmy $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. i niech $p_m = a + \frac{1}{m} v$.

Dla dost. dużych m $p_m \in \mathcal{U}$, bo $\mathcal{U}$ jest otwarty.

Oznaczmy teraz $q_m = (p_m, f(p_m)) \in G_f$. Z ciągłości f wynika, że $q_m \xrightarrow[m\to\infty]{} (a, f(a))$.

Mamy $q_m - (a, f(a)) = (p_m - a, f(p_m) - f(a)) =$

$$= (p_m - a, Df(a)(p_m - a) + R(p_m - a)) =$$

$$= \left(\tfrac{1}{m} v, Df(a) \cdot \tfrac{1}{m} v + R\left(\tfrac{1}{m} v\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(v, Df(a)v + \|v\| \cdot \frac{R\left(\frac{1}{m}v\right)}{\left\|\frac{1}{m}v\right\|}\right),$$

więc

$$\frac{q_m - (a, f(a))}{\|q_m - (a, f(a))\|} = \frac{\frac{1}{m}\left(v, Df(a)v + \|v\| \frac{R\left(\frac{1}{m}v\right)}{\left\|\frac{1}{m}v\right\|}\right)}{\left\|\frac{1}{m}\left(v, Df(a)v + \|v\| \frac{R\left(\frac{1}{m}v\right)}{\left\|\frac{1}{m}v\right\|}\right)\right\|} =$$

$$= \frac{\left(v, Df(a)v + \|v\| \frac{R\left(\frac{1}{m}v\right)}{\left\|\frac{1}{m}v\right\|}\right)}{\left\|\left(v, Df(a)v + \|v\| \frac{R\left(\frac{1}{m}v\right)}{\left\|\frac{1}{m}v\right\|}\right)\right\|} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{(v, Df(a)v)}{\|(v, Df(a)v)\|},$$

bo $\frac{R\left(\frac{1}{m}v\right)}{\left\|\frac{1}{m}v\right\|} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. ← tu korzystamy z różniczkowalności funkcji f w punkcie a.

To dowodzi, że $(v, Df(a)v) \in T_{(a, f(a))} G_f$ gdy $v \neq 0$.

Na mocy umowy, dla $v = 0$ wektor $(0,0) = (0, Df(a) \cdot 0) \in T_{(a, f(a))} G_f$.

Teraz (⠄⠂).

Niech $q_m = (p_m, f(p_m))$ będzie ciągiem punktów z G_f takim, że $p_m \neq a$ dla $m = 1, 2, \ldots$, oraz $q_m \xrightarrow{m\to\infty} (a, f(a))$.

Załóżmy też, że
$$\frac{q_m - (a, f(a))}{\|q_m - (a, f(a))\|} \longrightarrow \frac{(v,s)}{\|(v,s)\|} = (w, t)$$
dla pewnego niezerowego wektora $(v,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Wykażemy, że wówczas $s = Df(a)v$; oczywiście wtedy
$$t = \frac{s}{\|(v,s)\|} = Df(a)\frac{v}{\|(v,s)\|} = Df(a)w,$$
i odwrotnie – jeżeli $t = Df(a)w$, to $s = Df(a)v$.

Oznaczmy, dla uproszczenia zapisu,
$$\lambda_m = \|q_m - (a, f(a))\| = \sqrt{\|p_m - a\|^2 + (f(p_m) - f(a))^2}.$$

Oczywiście $\lambda_m \geqslant \|p_m - a\|$, $w = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{p_m - a}{\lambda_m}$, $t = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{f(p_m) - f(a)}{\lambda_m}$.

Stąd
$$|Df(a)w - t| = \left|Df(a)\lim_{m\to\infty}\frac{p_m - a}{\lambda_m} - \lim_{m\to\infty}\frac{f(p_m) - f(a)}{\lambda_m}\right| =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m}\left|f(p_m) - f(a) - Df(a)(p_m - a)\right| =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}|R(p_m - a)| = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\frac{\|p_m - a\|}{\lambda_m}}_{\in [0,1],\ \text{bo } \lambda_m \geqslant \|p_m - a\|} \cdot \underbrace{\frac{|R(p_m - a)|}{\|p_m - a\|}}_{\to 0,\ \text{bo } \|p_m - a\| \to 0} = 0$$

czyli $t = Df(a)w$.
$$\Updownarrow$$
$s = Df(a)v$.

To kończy dowód 1)⇒2).

2) $\Rightarrow$ 1)

<u>Obserwacja</u>: Jeżeli $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową niezawierającą wektora $e_{n+1} = (0,0,\dots,0,1)$, to V jest wykresem pewnego funkcjonału liniowego $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tj $V = \{(v, Tv) : v \in \mathbb{R}^n\}$.

<u>Dowód</u>: Wystarczy wypisać równanie podprzestrzeni V w bazie standardowej i zauważyć, że gdy $e_{n+1} \notin V$, to można je rozwiązać względem ostatniej zmiennej x_{n+1}: $x_{n+1} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Wtedy $T(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.

Niech zachodzi 2), tzn. stożek styczny $T_{(a,f(a))} G_f = V$ jest n-wym. podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{n+1}$ niezawierającą e_{n+1}. Niech $T: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ będzie ~~przek~~ funkcjonałem liniowym, którego wykresem jest V. Wykażemy, że

$$\lim_{p \to a} \frac{|f(p) - f(a) - T(p-a)|}{\|p-a\|} = 0, \qquad (\star)$$

a więc że f jest różniczkowalna w a i $Df(a) = T$.

Założymy zatem, że $(\star)$ nie zachodzi (a więc granica w $(\star)$ nie istnieje lub jest różna od zera). Znajdziemy wtedy ciąg $p_m \to a$ i $\delta > 0$ takie, że

$$\frac{|f(p_m) - f(a) - T(p_m - a)|}{\|p_m - a\|} > \delta$$

Oznaczmy $q_m = (p_m, f(p_m)) \in G_f$ i $\xi_m = \dfrac{q_m - (a, f(a))}{\|q_m - (a, f(a))\|} \in \mathbb{S}^n$.

sfera jednostkowa w $\mathbb{R}^{n+1}$

Sfera $\mathbb{S}^n$ jest zbiorem zwartym, więc z ciągu (ξ_m) możemy wybrać podciąg (ξ_{m_k}) zbieżny do pewnego $\zeta = (v,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Podobnie jak w poprzedniej części dowodu,
$\cap$
$\mathbb{S}^n$
oznaczmy $\lambda_{m_k} = \| q_{m_k} - (a, f(a)) \|$.

Mamy $\xi_{m_k} = \dfrac{\|(p_{m_k} - a,\ f(p_{m_k}) - f(a))\|}{\lambda_{m_k}}$, więc

$$v = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{m_k} - a}{\lambda_{m_k}}, \qquad s = \lim_{k\to\infty} \frac{f(p_{m_k}) - f(a)}{\lambda_{m_k}}.$$

Z definicji stożka stycznego wiemy też, że $\zeta = (v,s) \in T_{(a,f(a))} G_f$, więc $s = Tv$. Stąd

$$0 = |s - Tv| = \left| \lim_{k\to\infty} \frac{f(p_{m_k}) - f(a)}{\lambda_{m_k}} - T \lim_{k\to\infty} \frac{p_{m_k} - a}{\lambda_{m_k}} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\|p_{m_k} - a\|}{\lambda_{m_k}} \cdot \underbrace{\left| \frac{f(p_{m_k}) - f(a) - T(p_{m_k} - a)}{\|p_{m_k} - a\|} \right|}$$

o tym czynniku wiemy, że jest, dla każdego k, większy niż $\delta > 0$, stąd by granica iloczynu mogła być zero, pierwszy czynnik musi ~~d~~ dążyć do zera:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{\|p_{m_k} - a\|}{\lambda_{m_k}} = \|v\|,$$

ale to oznacza, że $v = 0 \Rightarrow s = Tv = 0$,

ale wtedy $\zeta = (v,s) = (0,0) \notin \mathbb{S}^n$ $\lightning$.

To kończy dowód $2) \Rightarrow 1)$ i całego twierdzenia.

Def: Niech $f: A \to \mathbb{R}$. Poziomicą M_a funkcji f przechodzącą przez punkt $a \in A$ nazywamy zbiór $M_a = \{x \in A : f(x) = f(a)\}$

Twierdzenie: Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta; $\mathcal{U} \subset X$ otwarty, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U}$. Załóżmy też, że •) istnieje $r > 0$ taki, że f jest ciągła w $B(a,r)$

••) f jest różniczkowalna w a i $Df(a) \neq 0$.

Wówczas $T_a M_a = \ker Df(a) = \{w \in X : \langle \nabla f(a), w \rangle = 0\}$, w szczególności $T_a M_a$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X, kowymiaru 1, prostopadłą do $\nabla f(a)$.

Dowód: Musimy udowodnić, że

1) jeżeli $w \in T_a M_a$, to $Df(a) w = 0$

(ta część jest prostsza, nie wymaga założenia •) ani tego, że X jest skończenie wymiarowa)

2) jeżeli $w \in \ker Df(a)$, to $w \in T_a M_a$.

Zacznijmy od 1). Jeżeli $w = 0$, to oczywiście $w \in \ker Df(a)$, możemy więc dalej zakładać, że $w \neq 0$. Wtedy istnieje ciąg punktów (x_m) taki, że $x_m \in M_a$, $x_m \xrightarrow{m\to\infty} a$ oraz $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} = \frac{w}{\|w\|}$. Mamy $f(a) = f(x_m) = f(a) + Df(a)\cdot(x_m - a) + R(x_m - a)$, zatem $Df(a)(x_m - a) = -R(x_m - a) = o(\|x_m - a\|)$

$$i \lim_{m\to\infty} \frac{Df(a)(x_m-a)}{\|x_m-a\|} = \lim_{m\to\infty} \frac{-R(x_m-a)}{\|x_m-a\|} = 0$$

$$\|$$

$$Df(a)\left(\lim_{m\to\infty} \frac{x_m-a}{\|x_m-a\|}\right) = Df(a)\frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\|w\|}Df(a)w,$$

a więc $Df(a)w = 0$, co kończy dowód 1).

Z 2) jest znacznie więcej roboty. Jak poprzednio, wystarczy ograniczyć się do $w \neq 0$. Dla ustalonego $0 \neq w \in \ker Df(a)$ musimy wskazać ciąg punktów $x_m \in M_a \setminus \{a\}$ taki, że $\frac{x_m-a}{\|x_m-a\|} \longrightarrow \frac{w}{\|w\|}$.

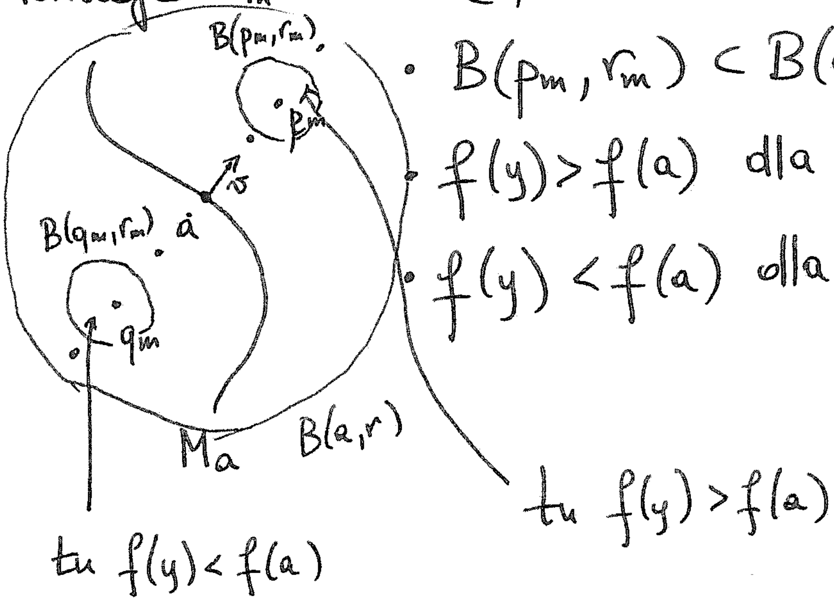
Oznaczmy $v = \nabla f(a) \neq 0$. Wiemy, że w kierunku v funkcja f rośnie. Precyzyjniej, jeżeli $g(t) = f(a+tv)$, to $g'(0) = D_v f(a) = \|\nabla f(a)\|^2 > 0$, więc istnieje $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r$, takie, że dla $t \in (0,\varepsilon)$ funkcja g przyjmuje wartości większe niż $g(0) = f(a)$, a dla $t \in (-\varepsilon, 0)$ mniejsze niż $g(0) = f(a)$.

Przyjmijmy zatem $p_m = a + \frac{1}{m}v$, $q_m = a - \frac{1}{m}v$.

Dla dostatecznie dużych m $(m > m_0)$ mamy $p_m, q_m \in B(a,r)$, $f(p_m) > f(a)$, $f(q_m) < f(a)$.

Wiemy też, że funkcja f jest ciągła w punktach p_m i q_m, jeżeli więc $f(p_m) > f(a)$, to $f(y) > f(a)$ dla wszystkich y dostatecznie bliskich p_m.

Analogicznie, $f(y) < f(a)$ dla y bliskich q_m.
Formalizując tę obserwację, dla każdego $m > m_0$ istnieje $r_m > 0$ takie, że



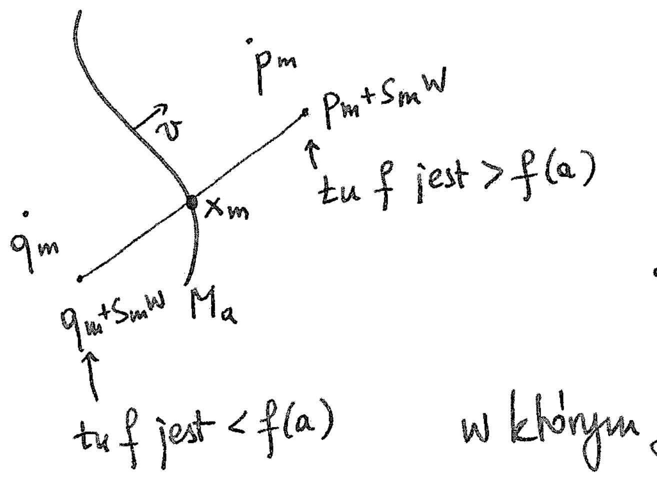
- $B(p_m, r_m) \subset B(a,r)$, $B(q_m, r_m) \subset B(a,r)$
- $f(y) > f(a)$ dla $y \in B(p_m, r_m)$
- $f(y) < f(a)$ dla $y \in B(q_m, r_m)$

Niech teraz $s_m = \frac{r_m}{2\|w\|}$, tak, by $p_m + s_m w \in B(p_m, r_m)$
$q_m + s_m w \in B(q_m, r_m)$

Wiemy, że $f(p_m + s_m w) > f(a)$, $f(q_m + s_m w) < f(a)$.
Niech teraz $g_m(t) = f(a + tv + s_m w)$.

$g_m(-\frac{1}{m}) = f(q_m + s_m w) < f(a)$, $g_m(\frac{1}{m}) = f(p_m + s_m w) > f(a)$

i funkcja $g_m : [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \to \mathbb{R}$ jest ciągła,
bo cały odcinek $\{a + tv + s_m w : t \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]\}$ leży w $B(a,r)$.



Z tw. Bolzano-Cauchy'ego o wł. Darboux istnieje $t_m \in (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ takie, że $f(t_m) = f(a)$;
innymi słowy – odcinek $\{a + tv + s_m w : t \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]\}$ musi przeciąć poziomicę M_a. Punkt, w którym ją przecina oznaczmy x_m:
$x_m = a + t_m v + s_m w$, $f(x_m) = f(a)$.

Zauważmy jeszcze, że dla każdego $m > m_0$ punkt x_m jest różny od a, gdyż wektory v i w są liniowo niezależne ($v \notin \ker Df(a)$, a $w \in \ker Df(a)$), gdyby $x_m = a$, to $t_m v + s_m w = 0 \Rightarrow t_m = 0, s_m = 0$, ale wiemy, że $s_m \neq 0$.

Pozostaje wykazać, że $\lim_{m\to\infty} \frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \overset{\odot}{=} \frac{w}{\|w\|}$, co dowiedzie, że $w \in T_a M_a$.

Nie mamy jednak gwarancji, że $\odot$ zachodzi, ani nawet, że granica w $\odot$ istnieje. Zauważmy jednak, że $\xi_m = \frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \in \mathbb{S}^{\dim X - 1}$, a ta sfera jest zbiorem zwartym (tu korzystamy z tego, że X jest skończenie wymiarowa). Stąd z ciągu (ξ_m) możemy wybrać podciąg (ξ_{m_k}) zbieżny do pewnego $\zeta \in \mathbb{S}^{\dim X - 1}$.

Co więcej, dla każdego m
$$\xi_m = \frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} = \frac{t_m}{\|x_m - a\|} v + \frac{s_m}{\|x_m - a\|} w \in \operatorname{span}(v, w);$$
ta ostatnia przestrzeń jest domknięta $\Rightarrow \zeta \in \operatorname{span}(v, w)$, czyli $\zeta = \alpha v + \beta w$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O wektorze ζ wiemy, że
•) należy do sfery jednostkowej
••) jest styczny do M_a

Z ••) i części 1) twierdzenia wiemy, że $\zeta \in \ker Df(a)$, a więc
$$\langle v, \zeta \rangle = \langle \nabla f(a), \zeta \rangle = Df(a)\zeta = 0$$
$$\langle v, \zeta \rangle = \alpha \|v\|^2,$$
bo $w \perp v$. Stąd $\alpha = 0$, $\zeta = \beta w$.

Nie może też być $\beta = 0$, bo •). Co więcej, $\beta = \lim_{k\to\infty} \frac{s_{m_k}}{\|x_{m_k} - a\|} \geq 0$, To oznacza, że $w = \lambda \zeta$, gdzie $\lambda = \frac{1}{\beta} > 0$ i $\zeta \in \overline{T_a M_a}$ $\Rightarrow w \in \overline{T_a M_a}$. To kończy dowód 2) i całego twierdzenia. $\square$.

Twierdzenie o wartości średniej, wersja 1.0

Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, Y jest przestrzenią Hilberta, $\mathcal{U} \subset X$ jest otwarty i $F : \mathcal{U} \to Y$ jest różniczkowalna w sensie Gateaux na $\mathcal{U}$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$ zachodzi nierówność

$$\|F(x) - F(y)\|_Y \leq \|x - y\|_X \cdot \sup_{z \in [x,y]} |||DF(z)|||$$

<u>Uwaga</u>: to samo twierdzenie zachodzi przy słabszym założeniu, że Y jest przestrzenią Banacha, ale dowód wymaga silniejszych narzędzi.

<u>Dowód</u>: Nierówność jest oczywista, gdy $F(x) = F(y)$.

Załóżmy więc, że $F(x) \neq F(y)$ i niech $\xi = \dfrac{F(x) - F(y)}{\|F(x) - F(y)\|} \in Y$.

Niech $g(t) = \langle F((1-t)x + ty), \xi \rangle_Y$.

Funkcja g jest różniczkowalna na $[0,1]$, a nawet na nieco większym odcinku $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ — póki tylko $(1-t)x + ty \in \mathcal{U}$, mamy $g'(t) = \langle D_{y-x} F((1-t)x + ty), \xi \rangle_Y$

Stąd g jest ciągła na $[0,1]$ i różniczkowalna na $(0,1)$ i możemy do g zastosować tw. Lagrange'a: $g(1) - g(0) = g'(\tau)$ dla pewnego $\tau \in (0,1)$, zatem

$$\|F(x) - F(y)\|_Y = \langle F(x) - F(y), \xi \rangle_Y = |g(1) - g(0)| = |g'(\tau)| =$$

$$= |\langle D_{y-x} F((1-\tau)x + \tau y), \xi \rangle| \leq \|DF((1-\tau)x + \tau y) \cdot (y-x)\|_Y \cdot \|\xi\|_Y$$

$$\leq |||DF((1-\tau)x + \tau y)||| \cdot \|y - x\|_X \leq \|x - y\|_X \cdot \sup_{z \in [x,y]} |||DF(z)||| . \quad \square$$

Proszę teraz zajrzeć do notatek z zeszłego roku: takie twierdzenie o wartości średniej wystarcza, by udowodnić, że długość krzywej $\gamma: [a,b] \to X$, gdzie X jest p-nią Hilberta (choć wystarczy Banacha), zdefiniowaną jako supremum długości łamanych, wyraża się wzorem $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_X \, dt$

(oczywiście musimy założyć, że γ jest różniczkowalna na $[a,b]$ — jako że jest to funkcja jednej zmiennej, nie musimy rozróżniać między pochodną Frécheta i Gateaux — i że $\|\gamma'(t)\|$ jest całkowalna na $[a,b]$).

Twierdzenie o wartości średniej - wersja 2.0

Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y - Hilberta, $U \subset X$ otwarty i funkcja $F: U \to Y$ klasy $C^1(U,Y)$. Wówczas dla dowolnych $x, y \in U$ i krzywej $\gamma: [a,b] \to U$ klasy C^1 takiej, że $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, zachodzi

$$\|F(x) - F(y)\|_Y \leq \sup_{t \in [a,b]} |||DF(\gamma(t))||| \cdot \ell(\gamma).$$

Dowód: Jak poprzednio, przypadek $F(x) = F(y)$ jest trywialny, załóżmy więc że $F(x) \neq F(y)$ i niech $\xi = \frac{F(y) - F(x)}{\|F(x) - F(y)\|}$. Wtedy

$$\|F(x) - F(y)\| = \langle F(y) - F(x), \xi \rangle_Y = \langle F(y), \xi \rangle_Y - \langle F(x), \xi \rangle.$$

Niech $g(t) = \langle F(\gamma(t)), \xi \rangle_Y$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Funkcja g jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), wisc $\|F(x)-F(y)\|_Y = \langle F(y),\xi\rangle_Y - \langle F(x),\xi\rangle_Y$

$$= g(b)-g(a) = \int_a^b g'(t)\,dt = \int_a^b \langle DF(\gamma(t))\cdot\gamma'(t),\xi\rangle dt$$

$$\leq \int_a^b \|DF(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\|_Y \cdot \underbrace{\|\xi\|_Y}_{=1} dt$$

$$\leq \int_a^b |||DF(\gamma(t))||| \cdot \|\gamma'(t)\|_X\, dt$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} |||DF(\gamma(t)))|||\cdot\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \sup_{t\in[a,b]} |||DF(\gamma(t))|||\cdot \ell(\gamma).$$

$\square$.