Rachunek różniczkowy

<u>Definicja</u>: Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $\mathcal{U} \subset X$ zbiorem otwartym, $f: \mathcal{U} \to Y$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in \mathcal{U}$, jeżeli istnieje przekształcenie liniowe ciągłe $L \in B(X, Y)$ takie, że

$$f(x_0+h) - f(x_0) = L \cdot h + r(x_0, h),$$

(ta linijka to definicja $r(x_0, h)$, dla wszystkich h takich, że $x_0 + h \in \mathcal{U}$)

gdzie $r(x_0, h)$ spełnia $\dfrac{\| r(x_0, h) \|_Y}{\| h \|_X} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

równoważnie, gdy istnieje $L \in B(X, Y)$ takie, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - L \cdot h \|_Y}{\| h \|} = 0.$$

Przekształcenie L nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 (czasem: pochodną mocną/silną lub pochodną Frécheta) i oznaczamy $f'(x_0)$ lub (częściej) $Df(x_0)$.

Zadanko: wykazać, że jeżeli f ma w x_0 pochodną, to tylko jedną.

Definicja: Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathcal{U}$ w kierunku wektora $v \in X$ nazywamy granicę

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

i oznaczamy $D_v f(x_0)$, $f'_v(x_0)$, czasem $\nabla_v f(x_0)$

Szybka obserwacja: pochodna kierunkowa funkcji f w x_0, o ile istnieje, jest jednorodna względem wektora kierunku, tzn. $D_{\lambda v} f(x_0) = \lambda D_v f(x_0)$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dowód:

$$D_{\lambda v} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda v) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \overset{\to 0}{\widetilde{(t\lambda)}} v) - f(x_0)}{t\lambda} = \lambda D_v f(x_0)$$

Kolejna ważna obserwacja:
Jeżeli f jest różniczkowalna w $x_0 \in \mathcal{U}$, to pochodna kierunkowa $D_v f(x_0)$ istnieje we wszystkich kierunkach $v \in X$ i zachodzi równość

$$D_v f(x_0) = Df(x_0) \cdot v$$

<u>Dowód</u>

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \left\{ L = Df(x_0) \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{L \cdot tv + r(x_0, tv)}{t} = L \cdot v + \lim_{t \to 0} \|v\|_X \underbrace{\frac{r(x_0, tv)}{t\|v\|_X}} =$$

$$\left\| \frac{r(x_0, tv)}{t\|v\|_X} \right\|_Y = \frac{\|r(x_0, tv)\|_Y}{\|\underbrace{tv}_{\substack{\downarrow t \to 0 \\ 0}}\|_X} \xrightarrow[t \to 0]{} 0,$$ więc to też dąży do 0

$$= L \cdot v = Df(x_0) \cdot v.$$

ten rachunek ma sens dla $v \neq 0$, ale dla $v = 0$
$D_v f(x_0) = 0$ i $Df(x_0) \cdot v = 0$, więc też OK.

Wniosek: Jeżeli f jest różniczkowalna w $x_0 \in \mathcal{U}$, to pochodna kierunkowa $D_v f(x_0)$ ~~jest~~ zależy od v w sposób liniowy ciągły.

Popatrzmy na prosty przykład:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

~~Ko~~ Wiemy już, że ta funkcja nie jest ciągła w $(0,0)$, bo

$$f(t^2,t) = \frac{1}{2} \xrightarrow[t \to (0,0)]{} \frac{1}{2}$$

$$f(0,t) = 0 \to 0$$

Stwierdzenie: Jeżeli f jest (silnie) różniczkowalna w x_0, to f jest w x_0 ciągła.

Dowód:

$$\lim_{y \to x_0} f(y) = \lim_{y - x_0 \to 0} f(x_0 + (y - x_0)) = \left\{ y - x_0 = h \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(f(x_0) + L \cdot h + r(x_0, h) \right) =$$

$$= f(x_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } L \text{ ciągłe w } 0}}{0} + \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{r(x_0,h)}{\|h\|_X}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ w } Y}} \cdot \underbrace{\|h\|_X}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = f(x_0).$$

A pochodne kierunkowe?

Niech $v \neq (0,0)$
$ \overset{\shortparallel}{(v_1, v_2)}$

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tv_1 \cdot t^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} =$$

$$= \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1}$$

To ma sens, o ile $v_1 \neq 0$. A jeżeli $v_1 = 0$ z
$v = (0, v_2)$?

Wtedy $f(tv) = f(0, tv_2) = \frac{0 \cdot t^2 v_2^2}{0^2 + t^4 v_2^4} = 0$, więc

$$D_v f(0,0) = 0.$$

Stąd $D_v f(0,0) = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & v_1 \neq 0 \\ 0 & v_1 = 0 \end{cases}$

Nie jest to funkcja liniowa względem v, nie jest też ciągła w $(0,0)$...

<u>Wniosek</u>: Z istnienia pochodnych kierunkowych we wszystkich kierunkach v, nawet gdy istnieją, nie wynika różniczkowalność.

No to kolejny przykład:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta funkcja znów nie jest ciągła w $(0,0)$:

$f(t,t^3) = \frac{t^6}{2\cdot t^6} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$. A jak z jej pochodnymi kierunkowymi? Niech $v=(v_1,v_2) \neq (0,0)$.

$$D_vf(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4v_1^3v_2}{t\cdot(t^6v_1^6+t^2v_2^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1^3v_2}{v_2^2+t^4v_1^6} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

o ile $v_2 \neq 0$,

ale jeżeli $v_2 = 0$, to licznik jest zero, więc granica też.

Stąd przekształcenie $v \longmapsto D_vf(0,0)$ jest liniowe i ciągłe; z drugiej strony f nie może być różniczkowalna w $(0,0)$, bo nie jest tam ciągła...

<u>Def:</u> Jeżeli pochodna kierunkowa $D_vf(x_0)$ istnieje dla wszystkich $v \in X$ i zależy ~~linio~~ od v w sposób liniowy ciągły, to mówimy, że f jest różniczkowalna w x_0 w sensie Gateaux, przekszt. $v \longmapsto D_vf(x_0)$ to <u>pochodna Gateaux</u> funkcji f w x_0

To jeszcze jeden przykład:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Mamy $2x^2y \leq x^4+y^2$, więc $|f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$, i funkcja f jest ciągła w $(0,0)$.

Dalej, $D_v f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2 \cdot t\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{(t^4v_1^4+t^2v_2^2)\cdot t} = \lim_{t\to 0} \frac{t v_1^2 v_2 \sqrt{v_1^2+v_2^2}}{v_2^2+t^2v_1^4} = 0$$

(dla $v_2\neq 0$ od razu, dla $v_2=0$ licznik jest zero)

Stąd f jest różniczkowalna w $(0,0)$ w sensie Gateaux, a jej pochodna Gateaux jest równa zero. Łatwo jednak sprawdzić, że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$: gdyby była, to jej pochodna Frécheta musiałaby być równa pochodnej Gateaux; ale

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-Df(0,0)\cdot h|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h_1^2h_2}{h_1^4+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ (h_1,h_2)\to 0}} \frac{h_1^2h_2}{h_1^4+h_2^2}$$ nie istnieje! (dlaczego?)

Jeżeli w przestrzeni X mamy wyróżnioną bazę (np. bazę standardową $(e_i)_{i=1}^n$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$), to pochodne kierunkowe w kierunkach bazowych nazywamy pochodnymi cząstkowymi i oznaczamy w szczególny sposób:

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ta współrzędna}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

to $D_{e_i} f(x_0) \underset{\text{ozn.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \partial_i f(x_0) = D_i f(x_0)$;

w $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$ piszemy $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ itd.

Gdy mamy jawny wzór na f, wyrażony we współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$, pochodne cząstkowe liczy się szczególnie prosto: aby obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_1, \dots, z_n)$, ustalamy wszystkie zmienne $x_1, \dots, x_n$ poza x_i, kładąc we wzorze na f $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$ itd. Zostaje nam funkcja jednej zmiennej x_i, liczymy jej pochodną w $x_i = z_i$.

Przykład: $f(x,y) = x^2 y + x$

to $\frac{\partial f}{\partial x}(z,w) = \cancel{2zw} \; 2zw+1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(z,w) = z^2$

A gdy $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x,y \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

to $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; f(x,0) = 0$, podobnie $f(0,y) = 0$,

więc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Przypomnijmy: jeżeli f jest różniczkowalna w $x_0 \in X$, to jej pochodna kierunkowa $D_v f(x_0)$ jest z jej (silną) pochodną związana wzorem $D_v f(x_0) = Df(x_0)v$.
W szczególności, gdy $X = \mathbb{R}^n$ z bazą standardową,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = Df(x_0)e_i$$

Aby znać przekształcenie liniowe $Df(x_0) \in B(X,Y)$, wystarczy wiedzieć, jakie wartości przyjmuje na bazie. Stąd pochodne cząstkowe f w x_0 wyznaczają pochodną (o ile ta istnieje) jednoznacznie

Jeżeli $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{U}} \to \mathbb{R}^m$, to możemy zapisać

$f = (f_1, \dots, f_m)$, gdzie $f_i : U \to \mathbb{R}$ dla $i = 1, \dots, m$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \right) = Df(x) \cdot e_i$$

To oznacza, że $\underset{B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}{\underset{\cap}{Df(x)}}$ ma macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = Df(x)$$

$$\shortparallel$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots m \\ j=1,\dots,n}}$$

macierz tę nazywamy <u>macierzą Jacobiego</u> funkcji f w x_0.

W przypadku, gdy $n=m$ jest to macierz kwadratowa; jej wyznacznik $\det Df(x)$ to <u>jakobian</u> f w x_0.

Działania na pochodnych

Zacznijmy od pochodnej iloczynu – odpowiednika wzoru Leibniza. Dla funkcji o wartościach w $\mathbb{R}$ mieliśmy do wyboru w zasadzie tylko jeden iloczyn; dla funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^3$, np. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ możemy

$f(t)$ pomnożyć przez $g(t)$ np. skalarnie albo też wektorowo.

A gdy $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{12}$, możemy $f(x,y)$ pomnożyć przez $g(x,y)$ skalarnie, ale możemy też $\mathbb{R}^{12}$ zinterpretować jako $M_{3\times 4}$, ustawić współrzędne f w macierz 3×4, g w macierz 4×3 ~~i po~~ (albo i odwrotnie) i pomnożyć. Albo jako $M_{2\times 6}$ ... Dużo możliwości, które mają jedną wspólną cechę: wszystkie te iloczyny ~~zadane~~ są operacjami dwuliniowymi:

$$B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$$

liniowe w każdej zmiennej

Prościutkie zadanko: ~~$B: X\times Y \to Z$~~ — X, Y, Z Banacha

Przekształcenie dwuliniowe $B: X\times Y \to Z$ jest ciągłe $\iff$ istnieje stała $L>0$ t.ż.

$$\forall_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \quad \|B(x,y)\|_Z \le L\|x\|_X\|y\|_Y$$

Uwaga: Żeby to zadanie miało sens, musimy $X\times Y$ nadać strukturę przestrzeni Banacha, albo przynajmniej przestrzeni unormowanej. Łatwo można sprawdzić, że rzeczywiście $X\times Y$ z normą $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X+\|y\|_Y$ jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie: Niech W, X, Y, Z będą przestrzeniami Banacha, $\mathcal{U}\subset W$ otwarty, ~~B~~
$f: \mathcal{U} \to X$, $g: \mathcal{U}\to Y$ różniczkowalne w $x\in \mathcal{U}$,
$B: X\times Y \to Z$ dwuliniowe ciągłe.
Wówczas $B(f,g): \mathcal{U} \to Z$ jest różniczkowalna w $x\in\mathcal{U}$ i zachodzi

$$\forall_{h\in W} \quad DB(f,g)(x)\,h = B(Df(x)h, g(x)) + B(f(x), Dg(x)h)$$

Dowód: $B: X\times Y \to Z$ jest ciągłe, więc istnieje $L>0$

tż. $\forall_{a,b} \; \|B(a,b)\|_Z \leq L\, \|a\|_X \|b\|_Y$.

f, g różniczkowalne w $x\in U$, więc $f(x+h) = f(x) + Df(x)\cdot h + r_1(h)$

$$g(x+h) = g(x) + Dg(x)\cdot h + r_2(h)$$

i $\dfrac{\|r_1(h)\|_Z}{\|h\|_W} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\dfrac{\|r_2(h)\|_Z}{\|h\|_W} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,

poza tym $Df(x)$ i $Dg(x)$ są ciągłe (jako przekształcenia liniowe z W w odpowiednio X i Y).

Mamy $B(f(x+h), g(x+h)) = B(f(x)+Df(x)h + r_1(h), g(x)+Dg(x)h+r_2(h))$

$$= B(f(x), g(x)) + B(Df(x)h, g(x)) + B(f(x), Dg(x)h) +$$

$$+ \underbrace{B(r_1(h), g(x)+Dg(x)h+r_2(h)) + B(f(x)+Df(x)h+r_1(h), r_2(h))}_{R(h)}.$$

Musimy wykazać, że $\dfrac{\|R(h)\|_Z}{\|h\|_W} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

$$\frac{\|R(h)\|_Z}{\|h\|_W} \leq \frac{\|B(r_1(h), g(x)+Dg(x)h+r_2(h))\|_Z}{\|h\|_W} + \frac{\|B(f(x)+Df(x)h+r_1(h), r_2(h))\|_Z}{\|h\|_W}$$

$$\leq L\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\|r_1(h)\|_Z}{\|h\|_W}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \|g(x)\|_Z}}{\|g(x)+Dg(x)h+r_2(h)\|_Z} + L\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \|f(x)\|_Z}}{\|f(x)+Df(x)h+r_1(h)\|_Z} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\|r_2(h)\|_Z}{\|h\|_W}}$$

przy $h\to 0$.

Pozostaje pytanie o ciągłość przekształcenia

$$h \longmapsto B(Df(x)h, g(x)) + B(f(x), Dg(x)h)$$

ale to jest suma złożeń funkcji ciągłych, więc jest ciągłe. $\square$

Dzięki temu uogólnieniu wzoru Leibniza umiemy już różniczkować iloczyny skalarne, wektorowe, iloczyny macierzy itp.

No to potrzebujemy jeszcze wzoru na pochodną złożenia.

Niech więc $\mathcal{U} \subset X$ otwarty, $g : \mathcal{U} \to Y$,

$V \subset g(\mathcal{U}) \subset Y$ otwarty,

$f : V \to Z$.

Jeżeli g jest różniczkowalna w $x \in \mathcal{U}$,

f jest różniczkowalna w $g(x) \in V$,

to $f\circ g$ jest różniczkowalna w x $\Big\{ f\circ g : g^{-1}(V) \to Z$ (to jest zbiór otwarty w X)

i zachodzi wzór $D(f\circ g)^{*}(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x)$

składanie przekształceń liniowych

Dowód

$$f\circ g(x+h) = f(g(x+h)) = f\big(g(x)+Dg(x)\cdot h + r_2(h)\big) =$$

$$= f(g(x)) + Df(g(x))\cdot\big(Dg(x)\cdot h + r_2(h)\big) + r_1\big(Dg(x)h + r_2(h)\big)$$

$$= \underbrace{f(g(x))}_{f\circ g(x)} + \underbrace{Df(g(x))\cdot Dg(x)}_{\text{kandydat na pochodną}}\cdot h + \underbrace{Df(g(x))\cdot r_2(h) + r_1\big(Dg(x)h + r_2(h)\big)}_{R(h)}$$

Czy $\dfrac{\|R(h)\|_Z}{\|h\|_X} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$?

$$\leq$$

$$|||Df(g(x))|||\cdot \underbrace{\frac{\|r_2(h)\|_Z}{\|h\|_X}}_{\downarrow h\to 0 \atop 0} + \underbrace{\frac{\|r_1(Dg(x)h + r_2(h))\|_Z}{\|Dg(x)\cdot h + r_2(h)\|_Y}}_{A}\cdot \underbrace{\frac{\|Dg(x)\cdot h + r_2(h)\|_Y}{\|h\|_X}}_{B}$$

$$\frac{\|Dg(x)\cdot h + r_2(h)\|_Y}{\|h\|_X} \leq \frac{|||Dg(x)|||\cdot\|h\|_X}{\|h\|_X} + \frac{\|r_2(h)\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow[h\to 0]{} |||Dg(x)|||,$$

więc to jest ograniczone; w szczególności

$\|Dg(x)\cdot h + r_2(h)\|_Y \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Stąd wynika,

że $A \xrightarrow[h\to 0]{} 0$; B ograniczone $\Rightarrow A\cdot B \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

To dowodzi, że $\dfrac{\|R(h)\|_Z}{\|h\|_X} \to 0$.

Oczywiście jeżeli $Df(g(x))$ jest liniowe ciągłe i $Dg(x)$ jest liniowe ciągłe, to ich złożenie też jest przekształceniem liniowym ciągłym. $\square$.

Wiemy już, że z istnienia pochodnych cząstkowych ~~nie wynika~~ w pewnym punkcie dziedziny nie wynika

- istnienie pozostałych pochodnych kierunkowych
- istnienie pochodnej Gateaux w tym punkcie
- różniczkowalność w tym punkcie

ani nawet ciągłość. Mamy jednak

Twierdzenie: Załóżmy, że $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $x \in \mathcal{U}$ i dla pewnego $\varepsilon > 0$ we wszystkich punktach kuli $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ istnieją wszystkie pochodne cząstkowe f, które co więcej są ciągłe w punkcie x. Wdówczas f jest różniczkowalna w x